Corrigé de l'exercice supplémentaire du TD N°1 de « Physique du bâtiment » :

Veuillez bien revoir les transformations mathématiques. Il se peut qu'il y a des erreurs.

1. Les paramètres *M*, *R* et ρ sont indépendants si est seulement si :

$$[M]^{\alpha}.[R]^{\beta}.[\rho]^{\gamma} = 1 \qquad (1)$$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Soit :

$$M^{\alpha}.L^{\beta}.\left(\frac{M}{L^{3}}\right)^{\gamma} = 1$$

Ou sous une forme simplifiée :

$$M^{\alpha+\gamma}.L^{\beta-3\gamma} = 1$$

Dont la solution est obtenue d'après le système :

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=0\\ \beta-3\gamma=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=-\gamma\\ \beta=3\gamma\end{cases}$$

Remplaçons les solutions dans l'équation (1) :

$$[M]^{-\gamma}.[R]^{3\gamma}.[\rho]^{\gamma} = 1 \Rightarrow [M]^{-1}.[R]^{3}.[\rho] = 1$$

C'est-à-dire que :

$$[\rho] = \frac{[M]}{[R]^{3}}$$

2. Passons à la relation réelle :

$$\rho = c\frac{M}{R^{3}}$$, avec c : une constante.

On sait que le volume d'une planète, en forme d'une sphère, est exprimé par :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^{3}$$, d'où : $c = \frac{3}{4\pi}$

Et par suite :

$$\rho = \frac{3}{4\pi}.\frac{M}{R^{3}}$$

3. Supposons que cette relation existe :

$$[M]^{a}.[T]^{b}.[R]^{c} = [\alpha]$$, soit :

$$[M]^{a}.[T]^{b}.[L]^{c} = 1$$

Les trois paramètres M, T et L sont des dimensions de base et cette équation n'a pas de solution, sauf pour $a = b = c = 0$, ce qui signifie que la relation n'existe pas.

4. Dimension de G, la constante de gravitation universelle.

$$G = \frac{F.r^{2}}{m_1.m_2}$$

$$[G] = \frac{[F].[r]^{2}}{[m_1].[m_2]} = \frac{[M.L.T^{-2}].L^{2}}{[M]^{2}} = M^{-1}..T^{-2}.L^{3}$$

5. On peut écrire la relation précédente sous cette forme :

$$[G].M..T^{2}.L^{-3} = 1$$

Soit, en passant à la relation réelle :

$$G = k^{*}.\frac{L^{3}}{M..T^{2}},$$

avec k* : une constante. Cette loi ressemble à la 3ème loi de Kepler :

$$T^2 = 4\pi^2 . \frac{L^3}{G.M},$$

avec L : la distance entre deux planètes. Alors.

Dans le cas de la loi de Kepler $G.M = k$: constante de Kepler.

6. La masse volumique est :

$$\rho = \frac{3}{4\pi} . \frac{M}{R^3} .$$

Alors, on peut écrire la relation de G, en introduisant la masse volumique, comme suit :

$$G = k' . \frac{4}{3\pi} . \frac{1}{\rho . T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{\bar{k}}{\rho . G}$$, avec k', $\bar{k}$: des constantes.

7. D'après la loi de Kepler :

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 . a^3 = k$$

Revenons à l'équation $F = G\frac{M_S . m_2}{r^2} =$. On suppose que M_S : masse du soleil, $m_2 = M$: masse de la planète Terre.

$$k * G\frac{.M}{r^2} = g .$$

En fait $r = R + R_S + d$ avec R : rayon de la planète Terre, R_S : rayon du Soleil et d : distance minimale entre les surfaces des deux corps (Soleil - Terre).

8. D'après la troisième loi de Kepler :

$$T^2 = 4\pi^2 . \frac{L^3}{G.M_S},$$

avec L : demi grand-axe de la trajectoire elliptique (il est lié aussi à la distance R : de la planète au soleil).

9. Une pression est rapport force/surface.

$P = \frac{F}{S}$, alors : $[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2} = M.L^{-1}.T^{-2}$

10. Une pression P_G gravitationnelle peut-être exprimé par :

$$P_G = \frac{F}{S_P},$$

telle que la surface S_P : la surface de la planète de rayon R et de masse M.

Alors, on peut écrire :

$$P_G = \frac{F}{S_s} = G\frac{M_S . M}{4\pi . R^2 . r^2},$$

avec $4\pi . R^2$: l'aire (surface) de la planète de rayon R.

Donc une pression peut-être exprimée par :

$$[P_G] = \frac{|F|}{[S_s]} = [G]\frac{M^2}{[R]^4}$$

Remarque importante : Cet exercice est mal exprimé dans certains points. Car, parfois on ne peut pas exprimer pratiquement les paramètres comme la pression en fonction de paramètres comme le rayon de la planète, sa masse M et G uniquement. Mais, théoriquement, en analyse dimensionnelle, certaines expressions mathématiques sont autorisées.

Préparée (en ébauche) par le chargé du module : OMAR El-Hadj – www.hajomar.com