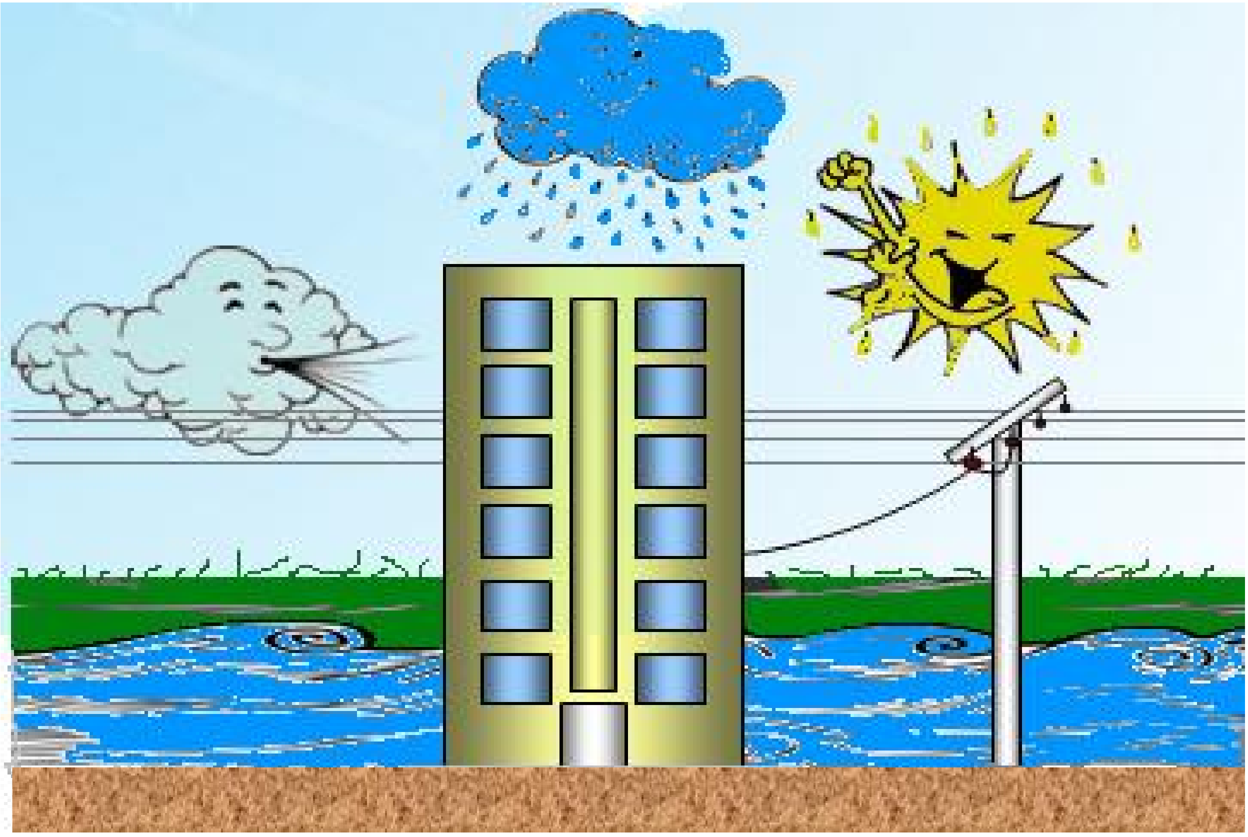
OMAR El-Hadj

Document en ébauche



PHYSIQUE DU BATIMENT 1

Exercices corrigés

Destinés aux étudiants de licence en architecture

Collection Jasmin

U.H.B. CHLEF - 2013

Document en ébauche

Chapitre II – Les forces – Corrigé de la série des Travaux Dirigés 2

Exercice 01 :

Deux points A et B dont les coordonnées sont données par : A(2,3,-3) ; B(5,7,-3).

- Déterminer le module, les composantes, la direction (les cosinus directeurs) et le sens du vecteur $\overrightarrow{AB}$;

- Déterminer les composantes du vecteur $\vec{V}$ perpendiculaire $\overrightarrow{AB}$ à appartenant au plan (0, x, y).

Corrigé :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A).\vec{i} + (y_B - y_A).\vec{j} + (z_B - z_A).\vec{k} = (5-2).\vec{i} + (7-3).\vec{j} + (-3+3).\vec{k} \;=\; 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

1. Caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

a. Module : $\overrightarrow{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

b. Les composantes : $x_{AB} = 3,\; y_{AB} = 4$

c. La direction (le support) : Obtenu en déterminant les cosinus directeurs :

$$\cos(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{x_{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\right) = \cos\left(\frac{3}{5}\right) = 0{,}6 \Rightarrow a = \cos^{-1}(0{,}6) = 53{,}13°$$

$$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{y_{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\right) = \cos\left(\frac{4}{5}\right) = 0{,}8 \Rightarrow b = \cos^{-1}(0{,}8) = 36;87°$$

$$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{z_{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\right) = \cos\left(\frac{0}{5}\right) = 0 \Rightarrow g = \cos^{-1}(0) = \frac{p}{2}$$

Le support se trouve dans le plan $(0, x, y)$.

c. Le sens :

Toutes les composantes sont positives, alors $\overrightarrow{AB}$ est orienté positivement suivant les deux axes Ox et Oy.

2. Les composantes du vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$:

Soit le vecteur $\vec{V}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et appartenant au plan $(0, x, y)$. Donc :

$$\vec{V}.\overrightarrow{AB} = 0 \;:\; (x.\vec{i} + y.\vec{j}) \bullet (3.\vec{i} + 4.\vec{j}) = 3x + 4y = 0, \text{ soit } y = \frac{3}{4}x.$$

Tout vecteur dont le support est la droite $y = \frac{3}{4}x$ est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et appartenant au plan $(0, x, y)$.

$$\vec{V} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \;:\; \begin{cases} x.i \\ y.j \\ z.k \end{cases} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

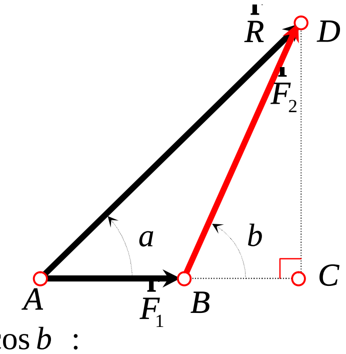
Exercice 02 :

La résultante $\vec{R}$ de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, de module égal à 50 N et fait un angle 30° par rapport à $\vec{F}_1$, de module égal à 15 N.

- Déterminer le module de la force $\vec{F}_2$ et la l'angle entre les deux vecteurs $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

Corrigé :

Nous devons former deux équations à deux inconnues $\vec{F}_2$ et b à partir de la figure ci-dessous.
D'une part, selon le théorème de Pythagore :
Pour simplifier l'écriture, posons $\|\vec{F}_1\| = F_1$, $\|\vec{F}_2\| = F_2$ et $\|\vec{R}\| = R$.



$R^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$,

Avec $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = F_1 + F_2.\cos b$; $\overline{CD} = F_2.\sin a$

D'où :

$R^2 = (F_1 + F_2.\cos b)^2 + F_2{}^2.\sin^2 b$

$R^2 = F_1^2 + F_2{}^2.\cos^2 b + F_2{}^2.\sin^2 b + 2F_1.F_2.\cos b$

$R^2 = F_1^2 + F_2{}^2 + 2F_1.F_2.\cos b$ (1)

D'autre part, nous cherchons une équation différente qui contient $\cos b$:

$\overline{AC} = R.\cos a = \overline{AB} + \overline{BC} = F_1 + F_2.\cos b$

d'où :

$F_2.\cos b = R.\cos a - F_1$ (2)

Substituons $F_2.\cos b$ de (2) dans (1) :

$R^2 = F_1^2 + F_2{}^2 + 2F_1.(R.\cos a - F_1)$

Soit :

$F_2 = \sqrt{R^2 + F_1{}^2 + 2F_1.R.\cos a} = \sqrt{50^2 + 15^2 - 2.15.50.\cos 30} = 37{,}76$ N

Et,

$$\cos b = \frac{R.\cos a - F_1}{F_2} = \frac{50.\cos 30 - 15}{44{,}44} = 0{,}7495 \Rightarrow b = \cos^{-1}(0{,}7495) = 41{,}45°$$

Exercice 03 :

Pour les vecteurs $\vec{V}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{V}_2 = -3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k}$; $\vec{V}_3 = -5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, Calculer :
$\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_1$; $\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$, $\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 \bullet (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ et $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$.

Corrigé :

a. $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_2 = (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) \bullet (-3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k}) = 2.(-3) + (-).1{,}5 + 5.(-7{,}5) =$

b. $\vec{V}_1 \bullet \vec{V}_1 = (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) \bullet (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) = 2^2 + (-1)^2 + 5^2 =$

c. $\vec{V}_2 \bullet \vec{V}_2 = (-3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k}) \bullet (-3\vec{i} + 1{,}5\vec{j} - 7{,}5\vec{k}) = (-3)^2 + (1{,}5)^2 + (-7{,}5)^2 =$

d. $$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{cases} 2\vec{i} \\ -\vec{j} \\ 5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} ((-1).(-7{,}5) - 5.1{,}5)\vec{i} = 0\vec{i} \\ -(2.(-7{,}5) - 5.(-3))\vec{j} = 0\vec{j} \\ (2.1{,}5 - (-1).(-3))\vec{k} = 0\vec{k} \end{cases}$$

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 // \vec{V}_2$
Les deux vecteurs sont colinéaires.

e. $$\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \begin{cases} -3\vec{i} \\ 1{,}5\vec{j} \\ -7{,}5\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} -5\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} = \begin{cases} (1{,}5.1 - (-7{,}5).(4))\vec{i} = 31{,}5\vec{i} \\ -((-3).1 - (-7{,}5).(-5))\vec{j} = 40{,}5\vec{j} \\ ((-3).4 - 1{,}5.(-5))\vec{k} = -4{,}5\vec{k} \end{cases}$$

f. $\vec{V_3}\wedge\vec{V_2}=\begin{cases}-5\vec{i}\\4\vec{j}\\\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}-3\vec{i}\\1{,}5\vec{j}\\-7{,}5\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}-(1{,}5.1-(-7{,}5).(4))\vec{i}=-31{,}5\vec{i}\\((-3).1-(-7{,}5).(-5))\vec{j}=-40{,}5\vec{j}\\-((-3).4-1{,}5.(-5))\vec{k}=4{,}5\vec{k}\end{cases}=-\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}$

$\vec{V_3}\wedge\vec{V_2}=-\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}$
Le produit vectoriel n'est pas commutatif.

Application : La norme produit vectoriel $\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$ fournit une mesure de la surface du parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs $\vec{V_1},\vec{V_2}$. $\left\|\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}\right\|=S_{12}$

. Le produit mixte $\vec{V_1}\bullet\left(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}\right)=0$.
$\vec{V_1},\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ se trouvent dans un même plan.

g. $\vec{V_1}\bullet\left(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}\right)=\begin{cases}2\vec{i}\\-\vec{j}\\5\vec{k}\end{cases}\bullet\begin{cases}-3\vec{i}\\1{,}5\vec{j}\\-7{,}5\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}-5\vec{i}\\4\vec{j}\\\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}2\vec{i}\\-\vec{j}\\5\vec{k}\end{cases}\bullet\begin{cases}31{,}5\vec{i}\\40{,}5\vec{j}\\-4{,}5\vec{k}\end{cases}=2.31{,}5-1.40{,}5-5.4{,}5=0$

Application : Le produit mixte donne une mesure du volume d'un parallélépipède dont les côtés sont les vecteurs $\vec{V_1},\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$.

h. $\vec{V_1}\wedge\left(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}\right)=\begin{cases}2\vec{i}\\-\vec{j}\\5\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}-3\vec{i}\\1{,}5\vec{j}\\-7{,}5\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}-5\vec{i}\\4\vec{j}\\\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}2\vec{i}\\-\vec{j}\\5\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}31{,}5\vec{i}\\40{,}5\vec{j}\\-4{,}5\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}-198\vec{i}\\-166{,}5\vec{j}\\112{,}5\vec{k}\end{cases}$

$\vec{V_1}\wedge\left(\vec{V_2}\wedge\vec{V_3}\right)\neq\left(\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}\right)\wedge\vec{V_3}$
Le produit double vectoriel n'est pas associatif.

Exercice 04 :

Pour les deux vecteurs de l'exercice 01, dont O est l'origine des axes de coordonnées, calculer :.

a. *Les produits scalaires :* $\vec{OA}\bullet\vec{OB}$, $\vec{OA}\bullet\vec{OA}$ et $\vec{OB}\bullet\vec{OB}$;

b. *Les produits vectoriels :* $\vec{OA}\wedge\vec{OB}$ *et* $\vec{OB}\wedge\vec{OA}$. *En déduire la surface du triangle OAB ;*

c. *Déterminer le vecteur* $\vec{AC}$ *de module égal à 5 et normal au plan formé par OA et OB ;*

d. *Le double produit vectoriel :* $\vec{OA}\wedge\vec{OB}\wedge\vec{AB}$;

e. *Le produit mixte :* $\vec{OA}\bullet\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right)$. En déduire le volume du parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

Corrigé :

$\vec{OA}=2\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$; $\vec{OB}=5\vec{i}+7\vec{j}-3\vec{k}$

a. $\vec{OA}\bullet\vec{OB}=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}\right)\bullet\left(5\vec{i}+7\vec{j}-3\vec{k}\right)=2.5+(-3).7+(-3).(-3)=-2$

$\vec{OA}\bullet\vec{OA}=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}\right)\bullet\left(2\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}\right)=2^2+(-3)^2+(-3)^2=22$

$\vec{OA}\bullet\vec{OB}=\left(5\vec{i}+7\vec{j}-3\vec{k}\right)\bullet\left(5\vec{i}+7\vec{j}-3\vec{k}\right)=5^2+7^2+(-3)^2=83$

b. $\vec{OA}\wedge\vec{OB}=\begin{cases}2\vec{i}\\-3\vec{j}\\-3\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}5\vec{i}\\7\vec{j}\\-3\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}9+21\\-(-6+15)\\14+15\end{cases}=\begin{cases}30\vec{i}\\-9\vec{j}\\19\vec{k}\end{cases}=-\vec{OB}\wedge\vec{OA}$

Surface du triangle :

La surface du triangle formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est la moitié de la quantité $\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|$:

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}S_{OAOB}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{30^2+(-9)^2+(19)^2}=\frac{36,63}{2}=18,31\,\textit{Unités de surface.}$$

c . Vecteur $\overrightarrow{AC}$:

D'une part, $\overrightarrow{AC}$ est perpendiculaire au plan $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=l.\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)$ tel que $l\in\mathbb{R}$.

D'autre part, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=5$.

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|l.\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\right\|=l.\left\|\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\right\|=36,63\,l.\vec{k}=5\Rightarrow l=\frac{5}{36,63}=0,136$$

D'où :

$$\overrightarrow{AC}=4,01\vec{i}-1,23\vec{j}+2,59\vec{k}$$

d . *Le double produit vectoriel :* $\overrightarrow{OA}\wedge\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{AB}\right)$

$$\overrightarrow{OA}\wedge\left(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{AB}\right)=\begin{cases}2\vec{i}\\-3\vec{j}\\-3\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}5\vec{i}\\7\vec{j}\\-3\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}3\vec{i}\\4\vec{j}\\0\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}2\vec{i}\\-3\vec{j}\\-3\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}12\vec{i}\\-9\vec{j}\\-1\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}-24\vec{i}\\-34\vec{j}\\18\vec{k}\end{cases}$$

e . *Le produit mixte :* $\overrightarrow{OA}\bullet\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

$$\overrightarrow{OA}\bullet\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}\right)\bullet\begin{cases}3\vec{i}\\4\vec{j}\\0\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}4,01\vec{i}\\-1,23\vec{j}\\2,59\vec{k}\end{cases}=\left(2\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}\right)\bullet\left(10,36\vec{i}-7,77\vec{j}-19,73\vec{k}\right)$$

$=20,72+23,31+59,19=103,22$ *Unités de volume* : Volume du parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 05 :

On donne les composantes des vecteurs $\overrightarrow{V_1}=3\vec{i}+5\vec{k}$; $\overrightarrow{V_2}=5\vec{i}+y.\vec{j}+z.\vec{k}$; $\overrightarrow{V_3}=3\vec{i}+2y.\vec{j}-2\vec{k}$; $\overrightarrow{V_4}=x.\vec{i}+2\vec{j}+10\vec{k}$ dans un repère orthonormé .

- Déterminer y et z pour que les vecteurs et $\overrightarrow{V_2}$ *soient colinéaires.*

- Déterminer x pour que les vecteurs $\overrightarrow{V_3}$ *et* $\overrightarrow{V_4}$ *soient perpendiculaires.*

Corrigé :

1. $\overrightarrow{V_1}//\overrightarrow{V_2}\Rightarrow\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}=\vec{0}$: $\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}=\begin{cases}3\vec{i}\\5\vec{j}\\0\vec{k}\end{cases}\wedge\begin{cases}5\vec{i}\\y.\vec{j}\\z.\vec{k}\end{cases}=\begin{cases}(5z-0y).\vec{i}=0.\vec{i}\Rightarrow z=0\\-(3z-0.5).\vec{j}=0.\vec{j}\Rightarrow z=0\\(3y-5.5).\vec{k}=0.\vec{k}\Rightarrow y=\dfrac{25}{3}\end{cases}$

2. $\overrightarrow{V_1}\perp\overrightarrow{V_2}\Rightarrow\overrightarrow{V_1}\bullet\overrightarrow{V_2}=0$:

$$\overrightarrow{V_1}\bullet\overrightarrow{V_2}=\left(3\vec{i}+2y.\vec{j}-2\vec{k}\right)\bullet\left(x.\vec{i}+2\vec{j}+10\vec{k}\right)=3x+4y-20=0\Rightarrow x=\frac{40}{3}.$$

Exercice 06 :

La ligne d'action d'une force F de 500 N passe par les deux points A(1.22 , 0, 2.74) et B(0 , 1.22, 0.61) dans un repère orthonormé. Déterminer les composantes de cette force.

Corrigé :

Le vecteur ayant un support porté par le vecteur unitaire $\vec{u}$, est exprimé comme suit :

$\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| . \vec{u}$, d'où : $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$

De même $\vec{F} = \left\|\vec{F}\right\| . \vec{u}$, car $\vec{F}$ est porté sur le même support que celui de $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = (0-1{,}22).\vec{i} + (1{,}22-0).\vec{j} + (0{,}61-2{,}74).\vec{k} = -1{,}22\vec{i} + 1{,}22\vec{j} - 2{,}13\vec{k}$.

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = (-1{,}22)^2 + (1{,}22)^2 - (2{,}13)^2 = 2{,}74$

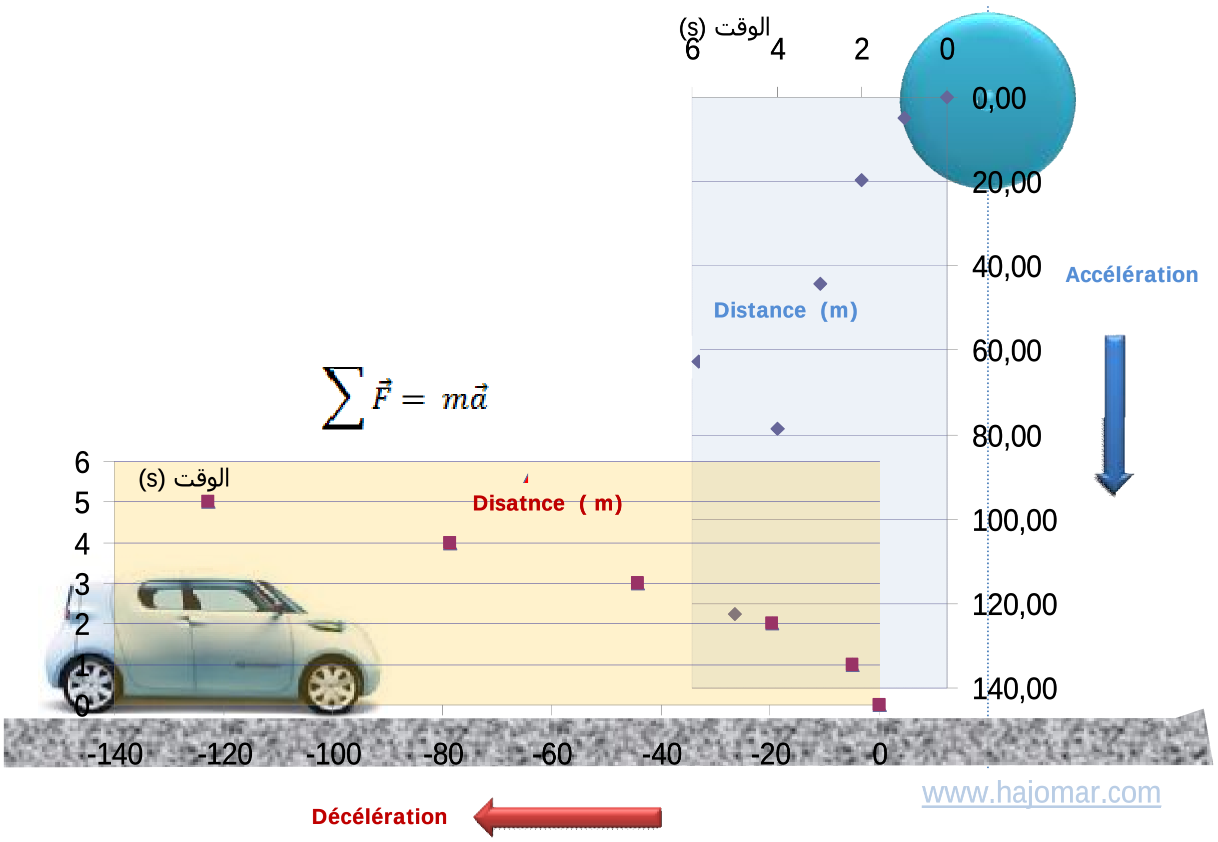
Alors,

$$\vec{F} = \left\|\vec{F}\right\| . \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{500}{2{,}74} . \left(-1{,}22\vec{i} + 1{,}22\vec{j} - 2{,}13\vec{k}\right) = -222{,}63\vec{i} + 222{,}63\vec{j} - 388{,}69\vec{k}$$

Exercice 07 :

Quelle est la force de freinage et la distance de sécurité qu'un véhicule de masse m_v *, roulant à une vitesse uniforme* $v_{0x} = 80 km/h$ *n'heurte pas un objet tombant d'une hauteur* $h = 10 m$ *à son propre poids sur le chemin du véhicule (Voir fig.)?*

Corrigé :



Corrigé :

1. Distance de sécurité :

L'équation de mouvement du véhicule sur l'axe horizontal :

On pose : $x - x_0 = x_s$: distance de sécurité.

$$x - x_0 = x_s = \frac{1}{2}a.t^2 + v_{0x}.t \qquad (1)$$

L'équation du mouvement de l'objet sur l'axe vertical :

On pose : $y - y_0 = h$: hauteur de chute.

$$y - y_0 = h = \frac{1}{2}g.t^2 + v_{0y}.t \qquad (2),\ v_{0y} = 0 \text{ (La vitesse initiale est nulle).}$$

Calculons le temps du chute qui est aussi le temps que le véhicule doit parcourir sur une distance de sécurité x_s :

$$h = \frac{1}{2}g.t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Remplaçons dans l'équation (1) :

$$x_s = a.\frac{h}{g} + v_{0x}.\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (3)$$

Faisons la dérivée de l'équation (1) :

$$\frac{dx_s}{dt} = v_{0f} = a.t + v_{0x}$$

Et puisque $v_{0f} = 0$, en supposant que le véhicule s'arrête juste au-dessous de l'objet :

$$a.t + v_{0x} = 0 \qquad (4)$$

D'où :

$$a = -\frac{v_{0x}}{t} = -v_{0x}\sqrt{\frac{g}{2h}} \qquad (5)$$

Remplaçons $a = v_{0x}.\sqrt{\frac{g}{2h}}$ dans l'équation (3), on trouve :

$$x_s = v_{0x}.\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{h}{g}.\sqrt{\frac{g}{2h}}\right) \qquad (6)$$

A.N. ($g = 9{,}81 m/s^2$, $v_{0x} = 80 km/h = 22{,}22 m/s$, $h = 10m$).

$$x_s = 22{,}22.\left(\sqrt{\frac{2.10}{9{,}81}} - \frac{10}{9{,}81}.\sqrt{\frac{9{,}81}{2.10}}\right) = 15{,}86 \text{ m.}$$

En fait, la distance de sécurité d_s doit être supérieure à x_s. Car le véhicule n'est pas un point matériel, mais un objet qui a des dimensions de l'ordre de quelques mètres.

2. Force de freinage :

D'après la 2ème loi de Newton :

$$\sum_s \vec{F} = m_v.\vec{a} \qquad (7)$$

La seule force qui provoque la décélération est celle du freinage F_f. Projetons l'équation (7) sur l'axe horizontal :

$$-F_f = m_v.a \qquad (7)$$

Le mouvement set supposé rectiligne sur l'axe horizontal.

A.N. (La force de freinage en fonction de la masse du véhicule m_v).

$$F_f = m_v.v_{0x}\sqrt{\frac{g}{2h}} = m_v.22{,}22\sqrt{\frac{9{,}81}{2.10}} = 15{,}56 m_v \text{ (N)}.$$

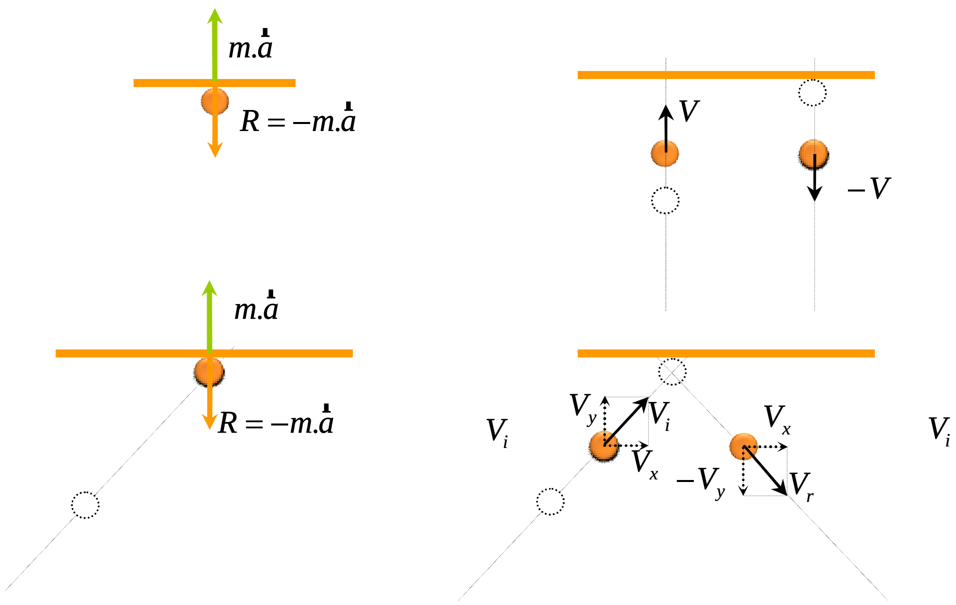
Exercice 08 :

Expliquer en représentant les vecteurs forces et les vecteurs vitesses, comment une bille de billard rebond après avoir heurté le bord de la table (la bande). Supposer les deux cas :

1. *Une direction de frappe perpendiculaire au bord e la table ;*
2. *Une direction de frappe inclinée d'un angle a par rapport au bord de la table .*

On suppose que tout frottement est négligeable.

Corrigé :



En négligeant le frottement, après que la canne frappe la bille, cette dernière se trouve en mouvement rectiligne uniforme d'près la première loi de Newton $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow V = Cte.$ Au moment où la bille frappe la bande, elle subit une décélération instantanée $\vec{a}$, car sa vitesse diminue de V à 0. Une force appelée d'inertie $m.\vec{a}$ sera contrariée par la réaction $\vec{R} = m.\vec{a}$ de la bande, ce qui provoque le retour de la bille à revenir sur son chemin, en changeant la direction de sa vitesse, qui restera constante, mais de sens opposé (-V).

Dans le deuxième cas, on décompose la vitesse de la bille en une vitesse horizontale V_x, qui au moment du choc, ne subit aucun changement, car il n'y a aucun obstacle horizontal. Alors que l'autre composante, verticale V_y, change de direction, verticalement (dans le sens opposé) : $-V_y$. La bille après le choc, prendra alors un chemin suivant la résultante des nouvelles composantes V_x et $-V_y$. En négligeant les frottements, l'angle réfléchi qui sera égal à l'angle incident.

Exercice 09 :

Déterminer le barycentre (centre de masse) des figures suivantes. Proposer une méthode de décomposition en éléments infinitésimaux des corps qui ne peuvent être décomposés en éléments usuels (méthodes d'intégration simple, double et triple). Chercher la solution dans la documentation bibliographique.

Récapituler les résultats dans un seul tableau.

Corrigé (incomplet):

1. Le centre de gravité des figures planes :

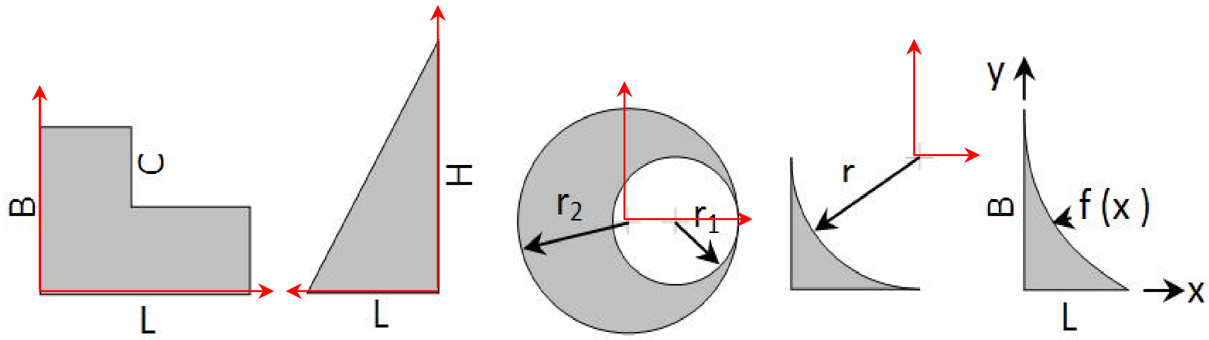
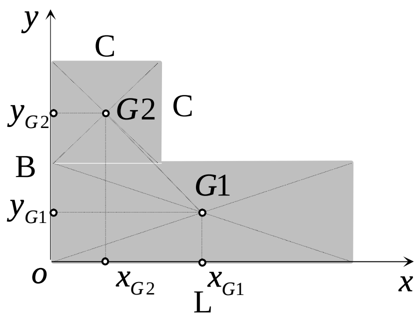


Fig. 1 :

a. Décomposons la figure en deux surfaces de formes usuelles (carrée + Rectangle).
b. Déterminons les caractéristiques géométriques de chaque surface usuelle : Les surfaces et les centres de gravité.



$$x_G = \frac{x_{G1}.S_1 + x_{G2}.S_2}{S_1 + S_2}$$
$$y_G = \frac{y_{G1}.S_1 + y_{G2}.S_2}{S_1 + S_2}$$

$$S_1 = L.(B-C) \ ; \ S_2 = C^2$$
$$x_{G1} = \frac{L}{2} \ ; \ x_{G2} = \frac{C}{2} \ ; \ y_{G1} = \frac{B-C}{2} \ ; \ y_{G2} = B - \frac{C}{2}.$$

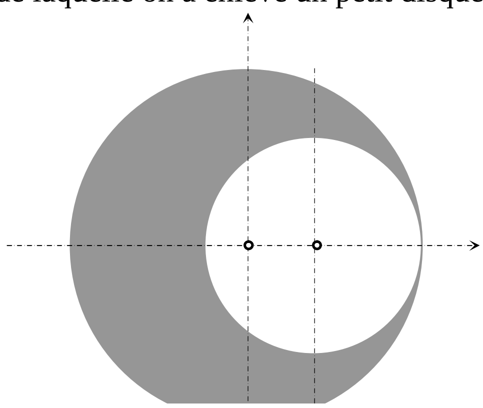
D'où :

$$x_G = \frac{\frac{L}{2}.L.(B-C) + \frac{C}{2}.C^2}{L.(B-C)+C^2} = \frac{1}{2}.\frac{L^2.(B-C)+C^3}{L.(B-C)+C^2}$$
$$y_G = \frac{\frac{B-C}{2}.L.(B-C) + \left(B - \frac{C}{2}\right)C^2}{L.(B-C)+C^2} =$$

Si on suppose que l'échelle du schéma est réelle : B = 2C.

$$x_G = \frac{1}{2}.\frac{L^2+C^2}{L+C} \ ; \ y_G = \frac{1}{2}.\frac{L.C+3C^2}{L+C}$$

Fig 3 : La figure est confectionnée d'un disque de rayon r_2 de laquelle on a enlevé un petit disque de rayon r_1.
Le choix des axes de coordonnées joue un rôle important.
On peut simplifier les équations, en choisissant G2, un centre de repère.
Ainsi,



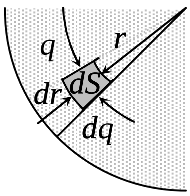
$$y_{G2} = y_{G1} = 0 \Rightarrow y_G = 0$$
$$x_G = \frac{x_{G1}.S_1 + x_{G2}.S_2}{S_1 + S_2}$$

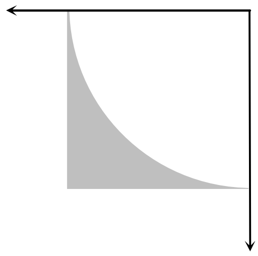
$$S_1 = p.r_1^2 \; ; \; S_2 = p.r_2^2$$
$$x_{G1} = r_2 - r_1 \; ; \; x_{G2} = 0 \, .$$

D'où :

$$x_G = \frac{-(r_2 - r_1).p.r_1^2 + 0.p.r_1^2}{-p.r_1^2 + p.r_2^2} = \frac{-(r_2 - r_1).r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{-(r_2 - r_1).r_1^2}{(r_2 - r_1).(r_2 + r_1)}$$
$$x_G = \frac{-.r_1^2}{r_2 + r_1} \; ; \; y_G = 0$$

Fig. 4 : La figure est confectionnée d'un carré de côté R *(de surface* $S_1 = R^2$ *)* de laquelle on a enlevé un quart de disque de rayon R *(de surface* $S_2 = \frac{p}{4} R^2$ *)* .





A cause de la symétrie : $x_G = y_G$

$$x_G = y_G = \frac{x_{G1}.S_1 - x_{G2}.S_2}{S_1 - S_2}$$
$$x_{G1} = y_{G1} = \frac{R}{2}$$

Nous devons faire l'intégrale pour déterminer le centre de gravité du quart de disque. Divisons sa surface en éléments infinitésimaux de surface $dS = r.dq.dr$ et de coordonnées $x = r.\cos q$; $y = r.\sin q$.

La figure a une symétrie suivant l'axe médiane : $x = y$,

D'où :

$$x_G = y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i dS_i}{\sum_{i=1}^{n} dS_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i dS_i}{\sum_{i=1}^{n} dS_i}$$

Quand $dS_i \to 0$,

$$x_G = y_G = \frac{\iint_S x.dS}{\iint_S dS} = \frac{\iint_S y.dS}{\iint_S dS} = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{q=0}^{\frac{p}{2}} x.dS}{\int_{r=0}^{R}\int_{q=0}^{\frac{p}{2}} dS} = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{q=0}^{\frac{p}{2}} r.\cos q.r.dq.dr}{\int_{r=0}^{R}\int_{q=0}^{\frac{p}{2}} r.dq.dr} = \frac{\int_{r=0}^{R}\int_{q=0}^{\frac{p}{2}} r^2.\cos q.dq.dr}{\int_{r=0}^{R}\int_{q=0}^{\frac{p}{2}} r.dq.dr}$$

$$= \frac{\int_{r=0}^{R} r^2.dr \int_{q=0}^{\frac{p}{2}} \cos q.dq}{\int_{r=0}^{R} r.dr \int_{q=0}^{\frac{p}{2}} .dq} = \frac{\left.\frac{r^3}{3}\right|_{r=0}^{R} .\sin q \left|_{q=0}^{\frac{p}{2}}\right.}{\left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=0}^{R} .q \left|_{q=0}^{\frac{p}{2}}\right.} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{R^2}{2}.\frac{p}{2}} = \frac{4R}{3p}$$

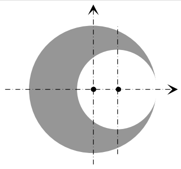
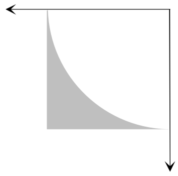
Alors :

$$x_{G2} = y_{G2} = \frac{4R}{3p}$$

D'où :

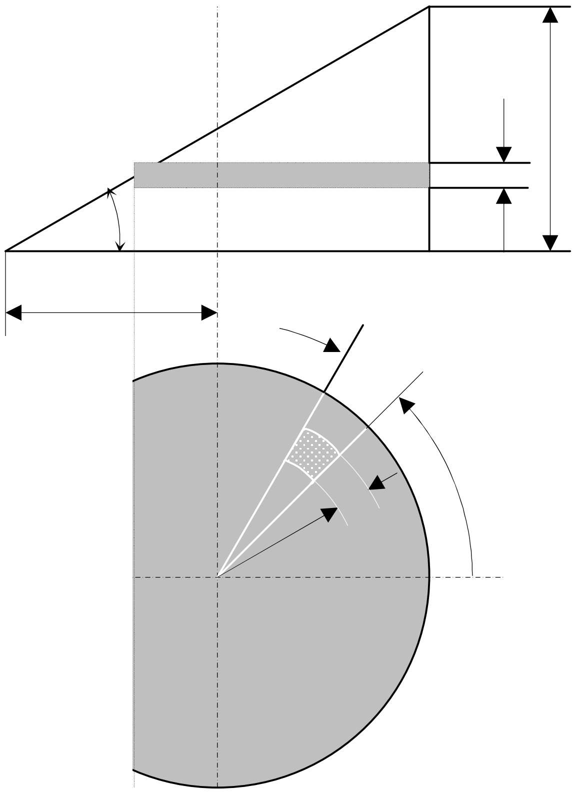
$$x_G = y_G = \frac{\frac{R}{2}.R^2 - \frac{4R}{3p}.\frac{p}{4}.R^2}{R^2 - \frac{p}{4}.R^2} = \frac{\frac{R}{6}}{1 - \frac{p}{4}} = \frac{2}{3}.\frac{R}{4 - p}$$

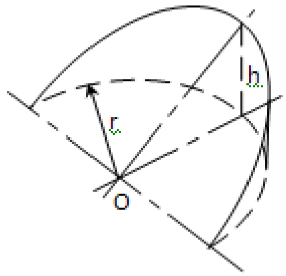
Tableau récapitulatif :

Figure	Barycentre	Figure	Barycentre	Figure	Barycentre
		$x_G = \frac{-.r_1^2}{r_2 + r_1}$ $y_G = 0$			
		$x_G = y_G = \frac{2}{3}.\frac{R}{4-p}$			

1. Le centre de gravité des corps pleins (en 3D) :

Fig. 1 :





Document en ébauche

Préparé par le chargé de la matière (Physique du bâtiment) : OMAR El-Hadj (09/02/2013)
www.hajomar.com/jpa

Ce document est en ébauche. Prière m'informer de tout erreur ou omission.
Le même fichier sera mis à jour, sans pour autant changer son lien.
Ne pas oublier de faire la mise à jour presque tous les jours pendant la première semaine.

Vos avis et suggestions me seront très utiles et encourageants.