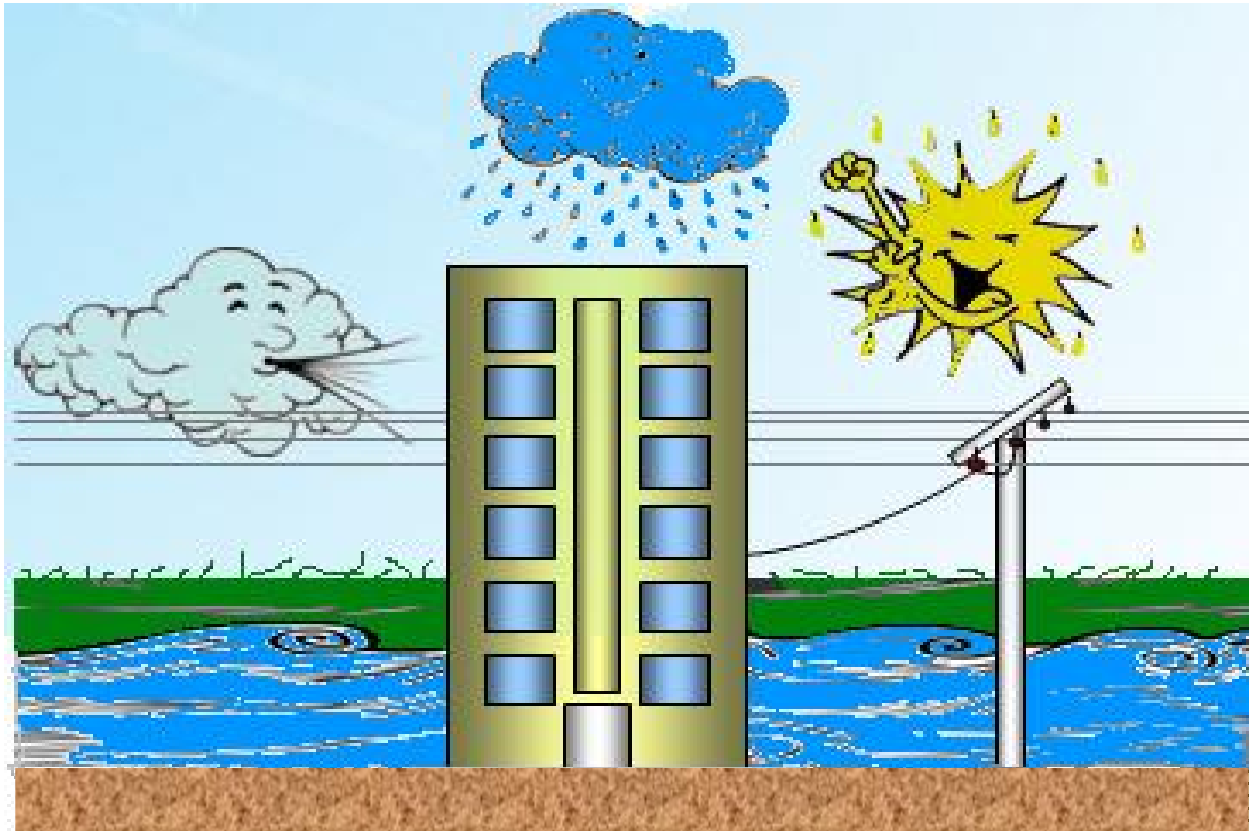


OMAR El-Hadj



Document en ébauche



# PHYSIQUE DU BATIMENT 1

Exercices corrigés

Destinés aux étudiants de licence en architecture

  
Collection  
Jasmin

U.H.B. CHLEF - 2013

## Chapitre II – Les forces – Corrigé de la série des Travaux Dirigés 2

## Exercice 01 :

Deux points A et B dont les coordonnées sont données par :  $A(2,3,-3)$  ;  $B(5,7,-3)$ .

- Déterminer le module, les composantes, la direction (les cosinus directeurs) et le sens du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  ;
- Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{V}$  perpendiculaire  $\overrightarrow{AB}$  à appartenant au plan  $(0, x, y)$ .

## Corrigé :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} = (5-2)\vec{i} + (7-3)\vec{j} + (-3+3)\vec{k} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

1. Caractéristiques du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  :

a. Module :  $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

b. Les composantes :  $x_{AB} = 3$ ,  $y_{AB} = 4$

c. La direction (le support) : Obtenu en déterminant les cosinus directeurs :

$$\cos(\vec{i}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{x_{AB}}{\|AB\|}\right) = \cos\left(\frac{3}{5}\right) = 0,6 \Rightarrow a = \cos^{-1}(0,6) = 53,13^\circ$$

$$\cos(\vec{j}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{y_{AB}}{\|AB\|}\right) = \cos\left(\frac{4}{5}\right) = 0,8 \Rightarrow b = \cos^{-1}(0,8) = 36,87^\circ$$

$$\cos(\vec{k}, \overrightarrow{AB}) = \cos\left(\frac{z_{AB}}{\|AB\|}\right) = \cos\left(\frac{0}{5}\right) = 0 \Rightarrow g = \cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

Le support se trouve dans le plan  $(0, x, y)$ .

c. Le sens :

Toutes les composantes sont positives, alors  $\overrightarrow{AB}$  est orienté positivement suivant les deux axes  $Ox$  et  $Oy$ .

2. Les composantes du vecteur perpendiculaire à  $\overrightarrow{AB}$  :

Soit le vecteur  $\vec{V}$  orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$  et appartenant au plan  $(0, x, y)$ . Donc :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 : (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (3\vec{i} + 4\vec{j}) = 3x + 4y = 0, \text{ soit } y = -\frac{3}{4}x.$$

Tout vecteur dont le support est la droite  $y = -\frac{3}{4}x$  est un vecteur orthogonal à  $\overrightarrow{AB}$  et appartenant au plan  $(0, x, y)$ .

$$\vec{V} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} : \begin{cases} x\vec{i} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ y\vec{j} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \\ z\vec{k} \end{cases}$$

## Exercice 02 :

La résultante  $\vec{R}$  de deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , de module égal à 50 N et fait un angle  $30^\circ$  par rapport à  $\vec{F}_1$ , de module égal à 15 N.

- Déterminer le module de la force  $\vec{F}_2$  et la l'angle entre les deux vecteurs  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ .

**Corrigé :**

Nous devons former deux équations à deux inconnues  $F_2$  et  $b$  à partir de la figure ci-dessous. D'une part, selon le théorème de Pythagore :

Pour simplifier l'écriture, posons  $\|\vec{F}_1\| = F_1$ ,  $\|\vec{F}_2\| = F_2$  et  $\|\vec{R}\| = R$ .

$$R^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2,$$

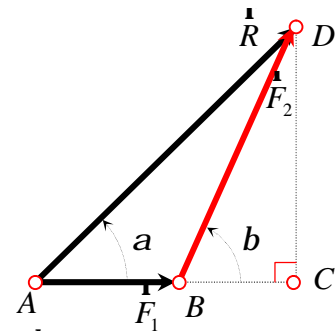
$$\text{Avec } \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = F_1 + F_2 \cdot \cos b ; \overline{CD} = F_2 \cdot \sin a$$

D'où :

$$R^2 = (F_1 + F_2 \cdot \cos b)^2 + F_2^2 \cdot \sin^2 b$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 \cdot \cos^2 b + F_2^2 \cdot \sin^2 b + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos b$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos b \quad (1)$$



D'autre part, nous cherchons une équation différente qui contient  $\cos b$  :

$$\overline{AC} = R \cdot \cos a = \overline{AB} + \overline{BC} = F_1 + F_2 \cdot \cos b$$

d'où :

$$F_2 \cdot \cos b = R \cdot \cos a - F_1 \quad (2)$$

Substituons  $F_2 \cdot \cos b$  de (2) dans (1) :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot (R \cdot \cos a - F_1)$$

Soit :

$$F_2 = \sqrt{R^2 + F_1^2 + 2F_1 \cdot R \cdot \cos a} = \sqrt{50^2 + 15^2 - 2 \cdot 15 \cdot 50 \cdot \cos 30} = 37,76 \text{ N}$$

Et,

$$\cos b = \frac{R \cdot \cos a - F_1}{F_2} = \frac{50 \cdot \cos 30 - 15}{44,44} = 0,7495 \Rightarrow b = \cos^{-1}(0,7495) = 41,45^\circ$$

**Exercice 03 :**

Pour les vecteurs  $\vec{V}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$  ;  $\vec{V}_2 = -3\vec{i} + 1,5\vec{j} - 7,5\vec{k}$  ;  $\vec{V}_3 = -5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ , Calculer :  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ ,  $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1$  ;  $\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2$ ,  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ ,  $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ ,  $\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2$ ,  $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$  et  $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$ .

**Corrigé :**

$$a. \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) \cdot (-3\vec{i} + 1,5\vec{j} - 7,5\vec{k}) = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1,5 + 5 \cdot (-7,5) =$$

$$b. \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_1 = (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}) = 2^2 + (-1)^2 + 5^2 =$$

$$c. \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2 = (-3\vec{i} + 1,5\vec{j} - 7,5\vec{k}) \cdot (-3\vec{i} + 1,5\vec{j} - 7,5\vec{k}) = (-3)^2 + (1,5)^2 + (-7,5)^2 =$$

$$d. \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} 2\vec{i} & -\vec{j} & 5\vec{k} \\ -3\vec{i} & 1,5\vec{j} & -7,5\vec{k} \end{vmatrix} = \begin{cases} ((-1) \cdot (-7,5) - 5 \cdot 1,5)\vec{i} = 0\vec{i} \\ -(2 \cdot (-7,5) - 5 \cdot (-3))\vec{j} = 0\vec{j} \\ (2 \cdot 1,5 - (-1) \cdot (-3))\vec{k} = 0\vec{k} \end{cases}$$

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 // \vec{V}_2$   
Les deux vecteurs sont colinéaires.

$$e. \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \begin{vmatrix} -3\vec{i} & 1,5\vec{j} & -7,5\vec{k} \\ -5\vec{i} & 4\vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} = \begin{cases} (1,5 \cdot 1 - (-7,5) \cdot 4)\vec{i} = 31,5\vec{i} \\ -((-3) \cdot 1 - (-7,5) \cdot (-5))\vec{j} = 40,5\vec{j} \\ ((-3) \cdot 4 - 1,5 \cdot (-5))\vec{k} = -4,5\vec{k} \end{cases}$$

$$f. \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -5i \\ 4j \\ k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3i \\ 1,5j \\ -7,5k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1,5 \cdot 1 - (-7,5) \cdot (4))i \\ ((-3) \cdot 1 - (-7,5) \cdot (-5))j \\ -((-3) \cdot 4 - 1,5 \cdot (-5))k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31,5i \\ -40,5j \\ 4,5k \end{pmatrix} = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$$

$$\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$$

Le produit vectoriel n'est pas commutatif.

**Application :** La norme produit vectoriel  $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$  fournit une mesure de la surface du parallélogramme dont les côtés sont les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ .  $\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = S_{12}$

$$g. \vec{V}_1 \bullet (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix} 2i \\ -j \\ 5k \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3i \\ 1,5j \\ -7,5k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5i \\ 4j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -j \\ 5k \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 31,5i \\ 40,5j \\ -4,5k \end{pmatrix} = 2 \cdot 31,5 - 1 \cdot 40,5 - 5 \cdot 4,5 = 0$$

. Le produit mixte  $\vec{V}_1 \bullet (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = 0$ .

$\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  se trouvent dans un même plan.

**Application :** Le produit mixte donne une mesure du volume d'un parallélépipède dont les côtés sont les vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$ .

$$h. \vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix} 2i \\ -j \\ 5k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3i \\ 1,5j \\ -7,5k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5i \\ 4j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -j \\ 5k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 31,5i \\ 40,5j \\ -4,5k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -198i \\ -166,5j \\ 112,5k \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \neq (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$$

Le produit double vectoriel n'est pas associatif.

#### Exercice 04 :

Pour les deux vecteurs de l'exercice 01, dont  $O$  est l'origine des axes de coordonnées, calculer :

- Les produits scalaires :  $\vec{OA} \bullet \vec{OB}$ ,  $\vec{OA} \bullet \vec{OA}$  et  $\vec{OB} \bullet \vec{OB}$  ;
- Les produits vectoriels :  $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$  et  $\vec{OB} \wedge \vec{OA}$ . En déduire la surface du triangle  $OAB$  ;
- Déterminer le vecteur  $\vec{AC}$  de module égal à 5 et normal au plan formé par  $OA$  et  $OB$  ;
- Le double produit vectoriel :  $\vec{OA} \wedge \vec{OB} \wedge \vec{AB}$  ;
- Le produit mixte :  $\vec{OA} \bullet (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$ . En déduire le volume du parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs  $\vec{OA}$ ,  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .

#### Corrigé :

$$\vec{OA} = 2i - 3j - 3k ; \vec{OB} = 5i + 7j - 3k$$

$$a. \vec{OA} \bullet \vec{OB} = (2i - 3j - 3k) \bullet (5i + 7j - 3k) = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 7 + (-3) \cdot (-3) = -2$$

$$\vec{OA} \bullet \vec{OA} = (2i - 3j - 3k) \bullet (2i - 3j - 3k) = 2^2 + (-3)^2 + (-3)^2 = 22$$

$$\vec{OB} \bullet \vec{OB} = (5i + 7j - 3k) \bullet (5i + 7j - 3k) = 5^2 + 7^2 + (-3)^2 = 83$$

$$b. \vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{pmatrix} 2i \\ -3j \\ -3k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5i \\ 7j \\ -3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+21 \\ -(-6+15) \\ 14+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30i \\ -9j \\ 19k \end{pmatrix} = -\vec{OB} \wedge \vec{OA}$$

Surface du triangle :

La surface du triangle formé par les vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  est la moitié de la quantité  $\|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\|$ :

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{OAOB} = \frac{1}{2} \|\vec{OA} \wedge \vec{OB}\| = \frac{1}{2} \sqrt{30^2 + (-9)^2 + (19)^2} = \frac{36,63}{2} = 18,31 \text{ Unités de surface.}$$

c. Vecteur  $\vec{AC}$  :

D'une part,  $\vec{AC}$  est perpendiculaire au plan  $(\vec{OA}, \vec{OB}) \Rightarrow \vec{AC} = I \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB})$  tel que  $I \in \mathbb{R}$ .

D'autre part,  $\|\vec{AC}\| = 5$ .

$$\|\vec{AC}\| = \|I \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{OB})\| = I \cdot \|(\vec{OA} \wedge \vec{OB})\| = 36,63 I \cdot k = 5 \Rightarrow I = \frac{5}{36,63} = 0,136$$

D'où :

$$\vec{AC} = 4,01\vec{i} - 1,23\vec{j} + 2,59\vec{k}$$

d. Le double produit vectoriel :  $\vec{OA} \wedge (\vec{OB} \wedge \vec{AB})$

$$\vec{OA} \wedge (\vec{OB} \wedge \vec{AB}) = \begin{pmatrix} 2\vec{i} \\ -3\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5\vec{i} \\ 7\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\vec{i} \\ -3\vec{j} \\ -3\vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 12\vec{i} \\ -9\vec{j} \\ -1\vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24\vec{i} \\ -34\vec{j} \\ 18\vec{k} \end{pmatrix}$$

e. Le produit mixte :  $\vec{OA} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC})$

$$\vec{OA} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = (2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot \begin{pmatrix} 3\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4,01\vec{i} \\ -1,23\vec{j} \\ 2,59\vec{k} \end{pmatrix} = (2\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot (10,36\vec{i} - 7,77\vec{j} - 19,73\vec{k})$$

= 20,72 + 23,31 + 59,19 = 103,22 Unités de volume : Volume du parallélépipède dont les cotés sont les vecteurs  $\vec{OA}$ ,  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .

### Exercice 05 :

On donne les composantes des vecteurs  $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 5\vec{k}$  ;  $\vec{V}_2 = 5\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  ;  $\vec{V}_3 = 3\vec{i} + 2y\vec{j} - 2\vec{k}$  ;  $\vec{V}_4 = x\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}$  dans un repère orthonormé.

- Déterminer  $y$  et  $z$  pour que les vecteurs  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  soient colinéaires.

- Déterminer  $x$  pour que les vecteurs  $\vec{V}_3$  et  $\vec{V}_4$  soient perpendiculaires.

### Corrigé :

$$1. \vec{V}_1 // \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} : \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 3\vec{i} \\ 5\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5\vec{i} \\ y\vec{j} \\ z\vec{k} \end{pmatrix} = \begin{cases} (5z - 0y)\vec{i} = 0\vec{i} \Rightarrow z = 0 \\ -(3z - 0.5y)\vec{j} = 0\vec{j} \Rightarrow z = 0 \\ (3y - 5.5)\vec{k} = 0\vec{k} \Rightarrow y = \frac{25}{3} \end{cases}$$

$$2. \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 :$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (3\vec{i} + 2y\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot (x\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}) = 3x + 4y - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{3}$$

**Exercice 06 :**

La ligne d'action d'une force  $F$  de 500 N passe par les deux points  $A(1,22, 0, 2,74)$  et  $B(0, 1,22, 0,61)$  dans un repère orthonormé. Déterminer les composantes de cette force.

**Corrigé :**

Le vecteur ayant un support porté par le vecteur unitaire  $\vec{u}$ , est exprimé comme suit :

$$\vec{AB} = \|\vec{AB}\| \vec{u}, \text{ d'où : } \vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$$

De même  $\vec{F} = \|\vec{F}\| \vec{u}$ , car  $\vec{F}$  est porté sur le même support que celui de  $\vec{AB}$  :

$$\vec{AB} = (0 - 1,22) \cdot \vec{i} + (1,22 - 0) \cdot \vec{j} + (0,61 - 2,74) \cdot \vec{k} = -1,22\vec{i} + 1,22\vec{j} - 2,13\vec{k}$$

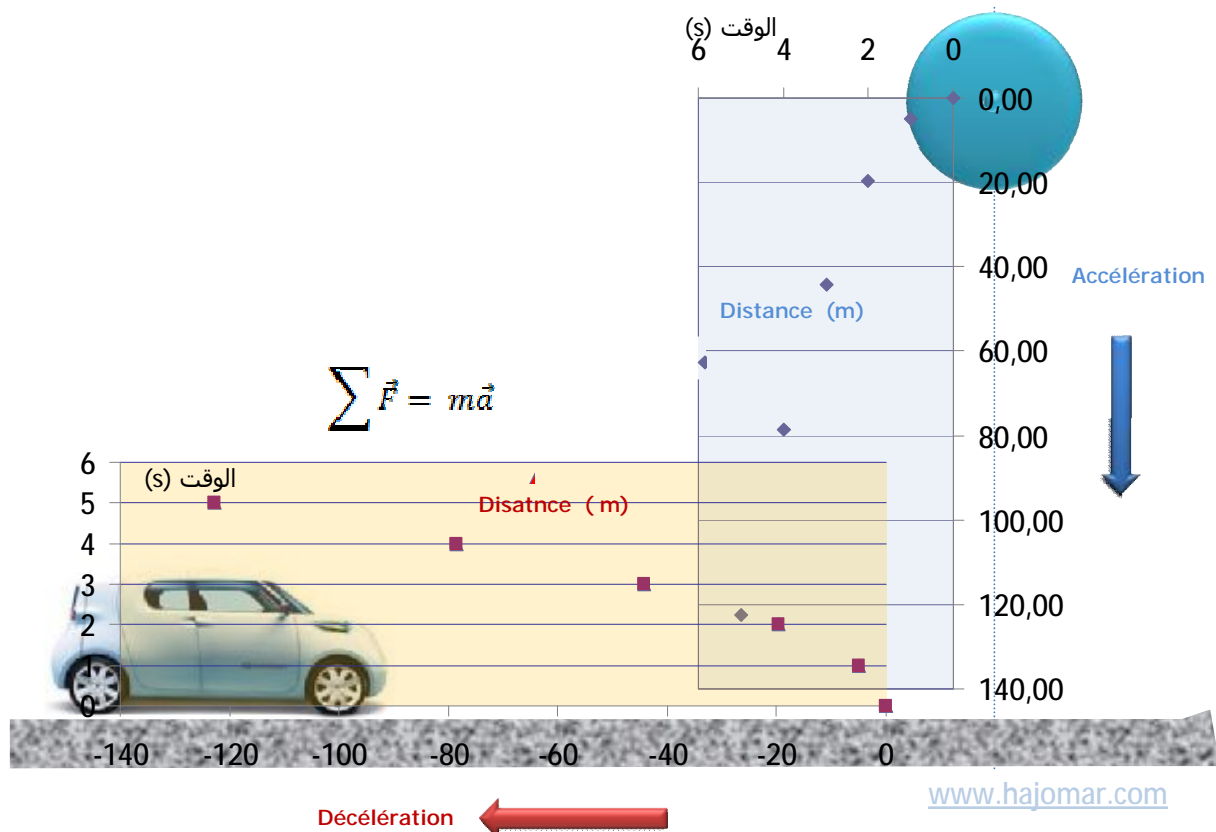
$$\|\vec{AB}\| = (-1,22)^2 + (1,22)^2 + (-2,13)^2 = 2,74$$

Alors,

$$\vec{F} = \|\vec{F}\| \cdot \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{500}{2,74} \cdot (-1,22\vec{i} + 1,22\vec{j} - 2,13\vec{k}) = -222,63\vec{i} + 222,63\vec{j} - 388,69\vec{k}$$

**Exercice 07 :**

Quelle est la force de freinage et la distance de sécurité qu'un véhicule de masse  $m_v$ , roulant à une vitesse uniforme  $v_{0x} = 80 \text{ km/h}$  n'heurte pas un objet tombant d'une hauteur  $h = 10 \text{ m}$  à son propre poids sur le chemin du véhicule (Voir fig.)?

**Corrigé :**

Corrigé :

### 1. Distance de sécurité :

L'équation de mouvement du véhicule sur l'axe horizontal :

On pose :  $x - x_0 = x_s$  : distance de sécurité.

$$x - x_0 = x_s = \frac{1}{2} a t^2 + v_{0x} t \quad (1)$$

L'équation du mouvement de l'objet sur l'axe vertical :

On pose :  $y - y_0 = h$  : hauteur de chute.

$$y - y_0 = h = \frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t \quad (2), \quad v_{0y} = 0 \text{ (La vitesse initiale est nulle).}$$

Calculons le temps du chute qui est aussi le temps que le véhicule doit parcourir sur une distance de sécurité  $x_s$  :

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Remplaçons dans l'équation (1) :

$$x_s = a \cdot \frac{h}{g} + v_{0x} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3)$$

Faisons la dérivée de l'équation (1) :

$$\frac{dx_s}{dt} = v_{0f} = a t + v_{0x}$$

Et puisque  $v_{0f} = 0$ , en supposant que le véhicule s'arrête juste au-dessous de l'objet :

$$a t + v_{0x} = 0 \quad (4)$$

D'où :

$$a = -\frac{v_{0x}}{t} = -v_{0x} \sqrt{\frac{g}{2h}} \quad (5)$$

Remplaçons  $a = v_{0x} \sqrt{\frac{g}{2h}}$  dans l'équation (3), on trouve :

$$x_s = v_{0x} \cdot \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{h}{g} \cdot \sqrt{\frac{g}{2h}} \right) \quad (6)$$

A.N. ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $v_{0x} = 80 \text{ km/h} = 22,22 \text{ m/s}$ ,  $h = 10 \text{ m}$ ).

$$x_s = 22,22 \cdot \left( \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9,81}} - \frac{10}{9,81} \cdot \sqrt{\frac{9,81}{2 \cdot 10}} \right) = 15,86 \text{ m.}$$

En fait, la distance de sécurité  $d_s$  doit être supérieure à  $x_s$ . Car le véhicule n'est pas un point matériel, mais un objet qui a des dimensions de l'ordre de quelques mètres.

### 2. Force de freinage :

D'après la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :

$$\sum_s \vec{F} = m_v \cdot \vec{a} \quad (7)$$

La seule force qui provoque la décélération est celle du freinage  $F_f$ . Projétons l'équation (7) sur l'axe horizontal :

$$-F_f = m_v \cdot a \quad (7)$$

Le mouvement est supposé rectiligne sur l'axe horizontal.

A.N. (La force de freinage en fonction de la masse du véhicule  $m_v$ ).

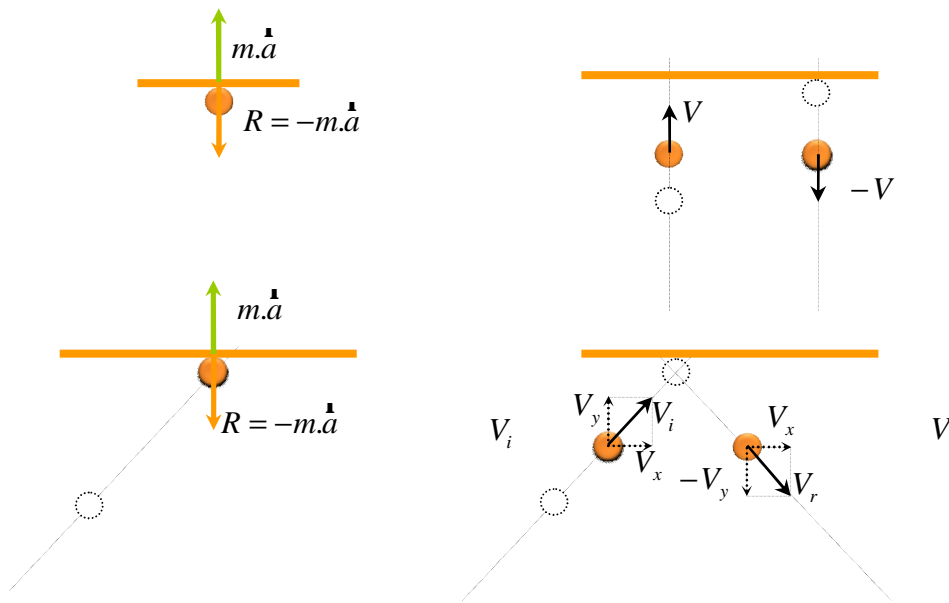
$$F_f = m_v \cdot v_{0x} \sqrt{\frac{g}{2h}} = m_v \cdot 22,22 \sqrt{\frac{9,81}{2,10}} = 15,56 m_v \text{ (N)}.$$

**Exercice 08 :**

Expliquer en représentant les vecteurs forces et les vecteurs vitesses, comment une bille de billard rebond après avoir heurté le bord de la table (la bande). Supposer les deux cas :

1. Une direction de frappe perpendiculaire au bord de la table ;
2. Une direction de frappe inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport au bord de la table .

On suppose que tout frottement est négligeable.

**Corrigé :**

En négligeant le frottement, après que la canne frappe la bille, cette dernière se trouve en mouvement rectiligne uniforme d'après la première loi de Newton  $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow V = Cte$ . Au moment où la bille frappe la bande, elle subit une décélération instantanée  $\vec{a}$ , car sa vitesse diminue de  $V$  à  $0$ . Une force appelée d'inertie  $m\vec{a}$  sera contrariée par la réaction  $\vec{R} = m\vec{a}$  de la bande, ce qui provoque le retour de la bille à revenir sur son chemin, en changeant la direction de sa vitesse, qui restera constante, mais de sens opposé ( $-V$ ).

Dans le deuxième cas, on décompose la vitesse de la bille en une vitesse horizontale  $V_x$ , qui au moment du choc, ne subit aucun changement, car il n'y a aucun obstacle horizontal. Alors que l'autre composante, verticale  $V_y$ , change de direction, verticalement (dans le sens opposé) :  $-V_y$ . La bille après le choc, prendra alors un chemin suivant la résultante des nouvelles composantes  $V_x$  et  $-V_y$ . En négligeant les frottements, l'angle réfléchi qui sera égal à l'angle incident.

**Exercice 09 :**

Déterminer le barycentre (centre de masse) des figures suivantes. Proposer une méthode de décomposition en éléments infinitésimaux des corps qui ne peuvent être décomposés en éléments usuels (méthodes d'intégration simple, double et triple). Chercher la solution dans la documentation bibliographique.

Récapituler les résultats dans un seul tableau.



## Corrigé (incomplet):

## 1. Le centre de gravité des figures planes :

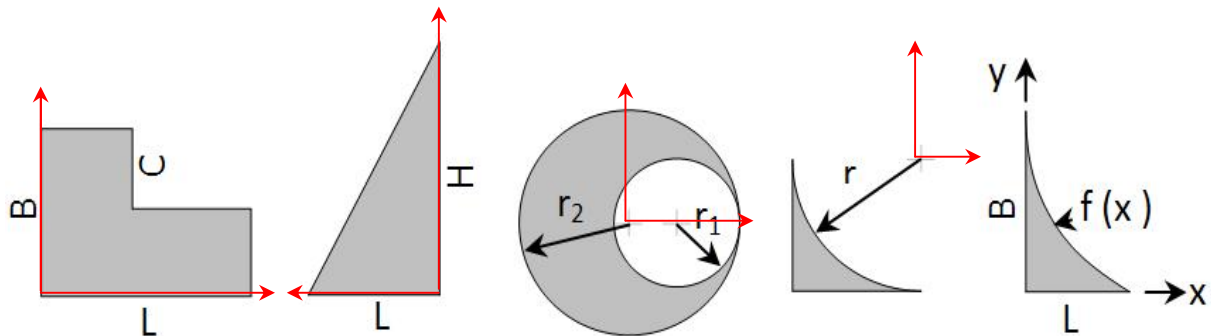
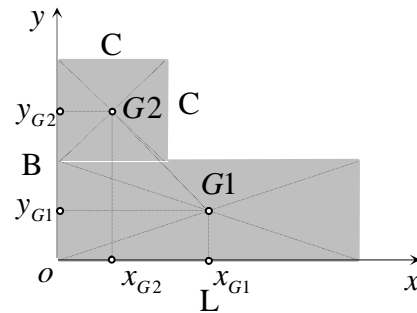


Fig. 1 :

- Décomposons la figure en deux surfaces de formes usuelles (carrée + Rectangle).
- Déterminons les caractéristiques géométriques de chaque surface usuelle : Les surfaces et les centres de gravité.

$$x_G = \frac{x_{G1} \cdot S_1 + x_{G2} \cdot S_2}{S_1 + S_2}$$

$$y_G = \frac{y_{G1} \cdot S_1 + y_{G2} \cdot S_2}{S_1 + S_2}$$



$$S_1 = L \cdot (B - C) ; S_2 = C^2$$

$$x_{G1} = \frac{L}{2} ; x_{G2} = \frac{C}{2} ; y_{G1} = \frac{B - C}{2} ; y_{G2} = B - \frac{C}{2}.$$

D'où :

$$x_G = \frac{\frac{L}{2} \cdot L \cdot (B - C) + \frac{C}{2} \cdot C^2}{L \cdot (B - C) + C^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2 \cdot (B - C) + C^3}{L \cdot (B - C) + C^2}$$

$$y_G = \frac{\frac{B - C}{2} \cdot L \cdot (B - C) + \left(B - \frac{C}{2}\right) C^2}{L \cdot (B - C) + C^2} =$$

Si on suppose que l'échelle du schéma est réelle :  $B = 2C$ .

$$x_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2 + C^2}{L + C} ; y_G = \frac{1}{2} \cdot \frac{L \cdot C + 3C^2}{L + C}$$

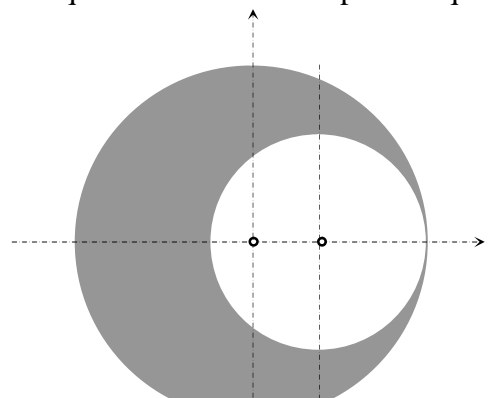
**Fig 3 :** La figure est confectionnée d'un disque de rayon  $r_2$  de laquelle on a enlevé un petit disque de rayon  $r_1$ .

Le choix des axes de coordonnées joue un rôle important. On peut simplifier les équations, en choisissant  $G_2$ , un centre de repère.

Ainsi,

$$y_{G2} = y_{G1} = 0 \Rightarrow y_G = 0$$

$$x_G = \frac{x_{G1} \cdot S_1 + x_{G2} \cdot S_2}{S_1 + S_2}$$



$$S_1 = p \cdot r_1^2 ; S_2 = p \cdot r_2^2$$

$$x_{G1} = r_2 - r_1 ; x_{G2} = 0.$$

D'où :

$$x_G = \frac{-(r_2 - r_1)p \cdot r_1^2 + 0 \cdot p \cdot r_1^2}{-p \cdot r_1^2 + p \cdot r_2^2} = \frac{-(r_2 - r_1)r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{-(r_2 - r_1)r_1^2}{(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)}$$

$$x_G = \frac{-r_1^2}{r_2 + r_1} ; y_G = 0$$

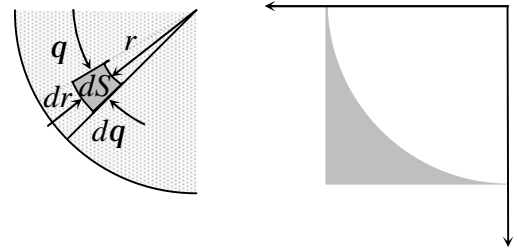
**Fig. 4 :** La figure est confectionnée d'un carré de côté  $R$  (de surface  $S_1 = R^2$ ) de laquelle on a enlevé un quart de disque

de rayon  $R$  (de surface  $S_2 = \frac{p}{4} R^2$ ).

A cause de la symétrie :  $x_G = y_G$

$$x_G = y_G = \frac{x_{G1} \cdot S_1 - x_{G2} \cdot S_2}{S_1 - S_2}$$

$$x_{G1} = y_{G1} = \frac{R}{2}$$



Nous devons faire l'intégrale pour déterminer le centre de gravité du quart de disque. Divisons sa surface en éléments infinitésimaux de surface  $dS = r \cdot dq \cdot dr$  et de coordonnées  $x = r \cdot \cos q$  ;  $y = r \cdot \sin q$ .

La figure a une symétrie suivant l'axe médiane :  $x = y$ ,

D'où :

$$x_G = y_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i dS_i}{\sum_{i=1}^n dS_i} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i dS_i}{\sum_{i=1}^n dS_i}$$

Quand  $dS_i \rightarrow 0$ ,

$$x_G = y_G = \frac{\iint_S x \cdot dS}{\iint_S dS} = \frac{\iint_S y \cdot dS}{\iint_S dS} = \frac{\int_{r=0}^R \int_{q=0}^{\frac{p}{2}} x \cdot dS}{\int_{r=0}^R \int_{q=0}^{\frac{p}{2}} dS} = \frac{\int_{r=0}^R \int_{q=0}^{\frac{p}{2}} r \cdot \cos q \cdot r \cdot dq \cdot dr}{\int_{r=0}^R \int_{q=0}^{\frac{p}{2}} r \cdot dq \cdot dr} = \frac{\int_{r=0}^R \int_{q=0}^{\frac{p}{2}} r^2 \cdot \cos q \cdot dq \cdot dr}{\int_{r=0}^R \int_{q=0}^{\frac{p}{2}} r \cdot dq \cdot dr}$$

$$= \frac{\int_{r=0}^R r^2 \cdot dr \int_{q=0}^{\frac{p}{2}} \cos q \cdot dq}{\int_{r=0}^R r \cdot dr \int_{q=0}^{\frac{p}{2}} dq} = \frac{\frac{r^3}{3} \Big|_{r=0}^R \cdot \sin q \Big|_{q=0}^{\frac{p}{2}}}{\frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^R \cdot q \Big|_{q=0}^{\frac{p}{2}}} = \frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{R^2}{2} \cdot \frac{p}{2}} = \frac{4R}{3p}$$

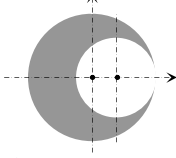
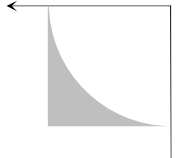
Alors :

$$x_{G2} = y_{G2} = \frac{4R}{3p}$$

D'où :

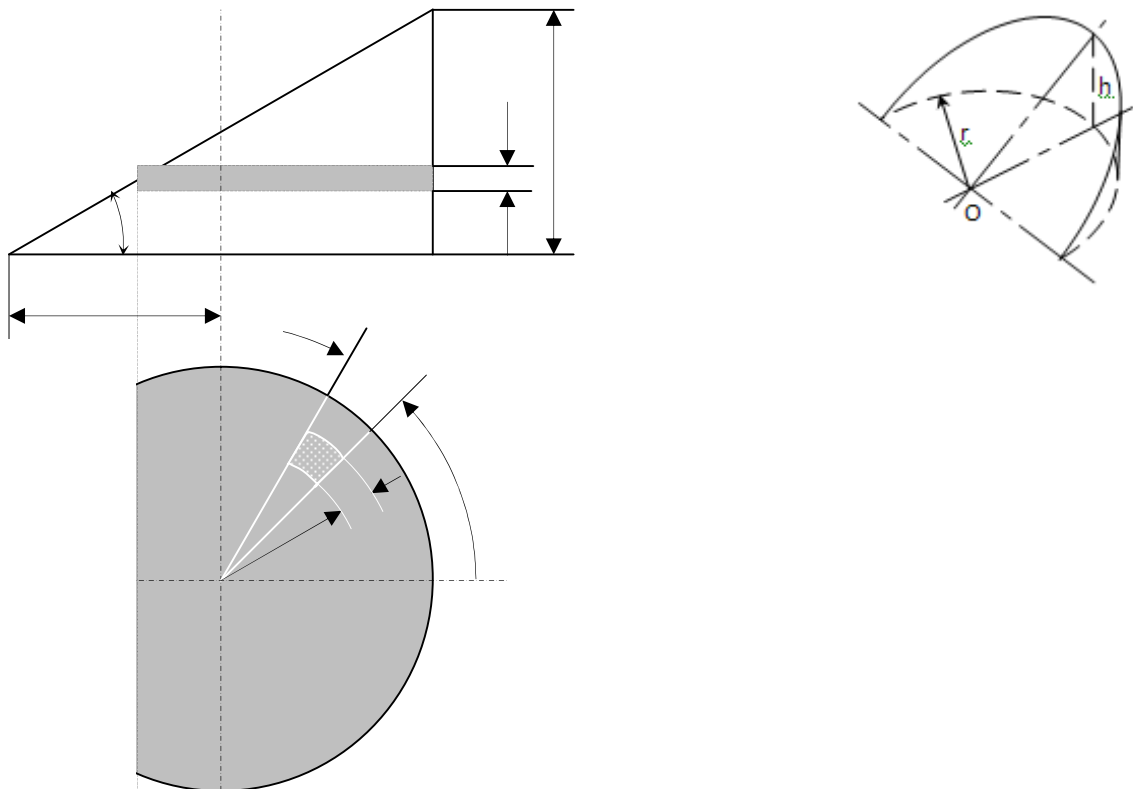
$$x_G = y_G = \frac{\frac{R}{2} \cdot R^2 - \frac{4R}{3p} \cdot \frac{p}{4} \cdot R^2}{R^2 - \frac{p}{4} \cdot R^2} = \frac{\frac{R}{6}}{1 - \frac{p}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{4-p}$$

Tableau récapitulatif :

Figure	Barycentre	Figure	Barycentre	Figure	Barycentre
	$x_G = \frac{-r_1^2}{r_2 + r_1}$				
	$y_G = 0$				
	$x_G = y_G$				
	$= \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{4-p}$				

1. Le centre de gravité des corps pleins (en 3D) :

Fig. 1 :



Document en ébauche

Préparé par le chargé de la matière (Physique du bâtiment) : OMAR El-Hadj (09/02/2013)  
[www.hajomar.com/jpa](http://www.hajomar.com/jpa)

**Ce document est en ébauche. Prière m'informer de tout erreur ou omission.**

Le même fichier sera mis à jour, sans pour autant changer son lien.

Ne pas oublier de faire la mise à jour presque tous les jours pendant la première semaine.

[Vos avis et suggestions me seront très utiles et encourageants.](#)



*Dédié à mes étudiants d'architecture à l'université Hassiba Benbouali de Chlef et à tous les étudiants et enseignants du domaine à travers le territoire national.*

*Nous avons travaillé assez dur pour vous préparer ce modeste travail. Une reproduction ou modification, à but non lucratif, est seule autorisée.*

Mes meilleurs vœux – Bonne chance