

Exercice 01 : (06 pts).

1. Donner la dimension de R dans l'expression de la force :

$$F = \frac{h}{t} \cdot R, \quad \text{avec } h : \text{la hauteur et } t : \text{le temps.}$$

2. La formule physique de l'accélération \mathbf{a} suivante, est-elle correcte dimensionnellement!? Fait une analyse dimensionnelle.

$$\mathbf{a} = R \cdot m \cdot t^2, \quad \text{avec } m : \text{la masse.}$$

Exercice 02 : (08 pts).

I. Soit les deux vecteurs forces : $\vec{F}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{F}_2 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$,

- Déterminer le vecteur produit vectoriel \vec{S} ;
- Démontrer qu'on peut exprimer \vec{S} en fonction du vecteur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. En déduire un vecteur unitaire pour \vec{S} . Conclure.
- Déterminer la surface du triangle limitée par les deux vecteurs \vec{F}_1 et \vec{F}_2 .
- Pour quelle condition sur x et y les vecteurs $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et \vec{S} sont colinéaires.

II. Déterminer le barycentre de la figure plane de couleur grise (fig. 1).

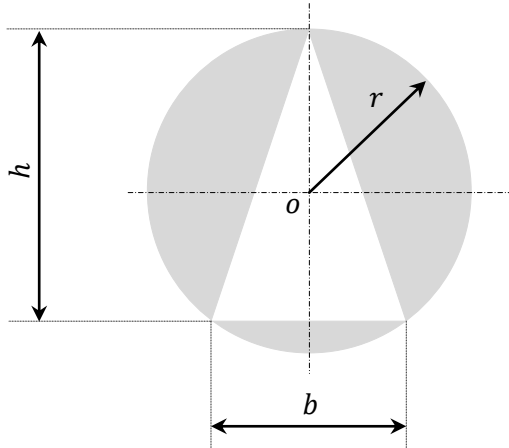


Fig. 1.

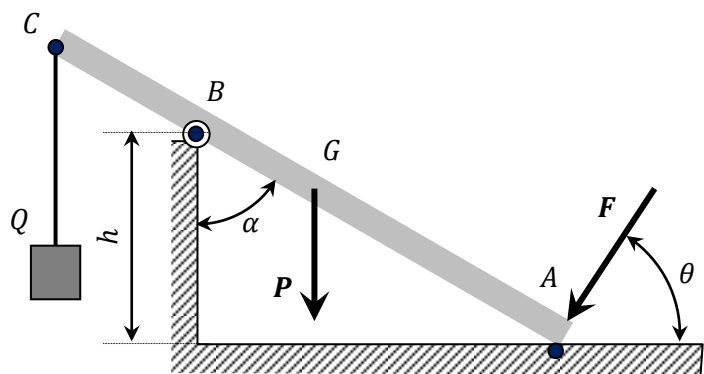


Fig. 2.

Exercice 03 : (06 pts).

Soit une potence constituée d'une barre homogène de masse m et de longueur l . La barre est posée librement sur une terrasse au point A . A cette extrémité, l'ouvrier appuie sur la barre, pour empêcher son balancement et la maintenir au sol, d'une force F perpendiculaire à la barre et fait un angle θ du sol.

A une distance du $2/3$ de sa longueur, la barre est articulée au point B , à un mur de hauteur h , au bord de la terrasse. Voir fig. 2.

Dans l'autre extrémité de la barre, au point C , on attache un câble de poids négligeable devant sa tension, pour lever une charge Q de masse m_c .

- Faire le bilan des forces s'exerçant sur la barre pour maintenir son équilibre.
- Exprimer les conditions d'équilibre de la barre et déterminer les réactions dans les liaisons A et B ainsi que la tension du fil au point C .
- Démontrer que si on la barre est appuyée simplement au point B , l'équilibre ne peut être maintenu si l'angle $\theta = 90^\circ$.

التمرين 1 : (06 نقاط)

1. أوجد بُعد R في علاقة القوة التالية :

$$F = \frac{h}{t} \cdot R$$

حيث h : الارتفاع و t : الزمن.

2. هل علاقة التسارع a التالية صحيحة بعديا؟! أجب باستخدام التحليل البعدي.

$$a = R \cdot m \cdot t^2$$

حيث : الكتلة.

التمرين 2 : (08 نقاط)

I. ليكن شعاعا القوتين التاليان :

$$\vec{F}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{F}_2 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

1. أوجد الجداء الشعاعي للقوتين \vec{S} ؛

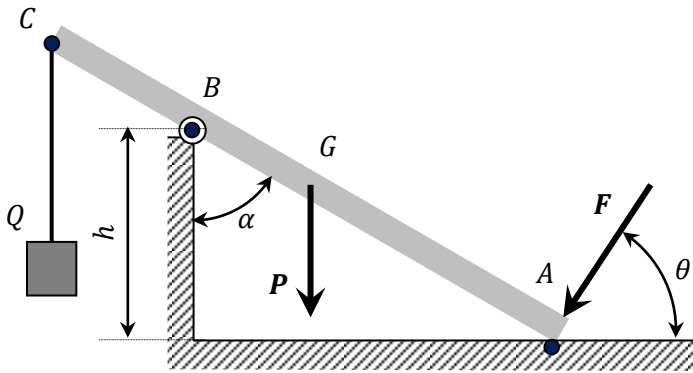
2. أثبت أنه يمكن كتابة \vec{S} بدلالة الشعاع $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. استنتج شعاع الوحدة للشعاع \vec{S} . ماذا

تلاحظ؟!؛

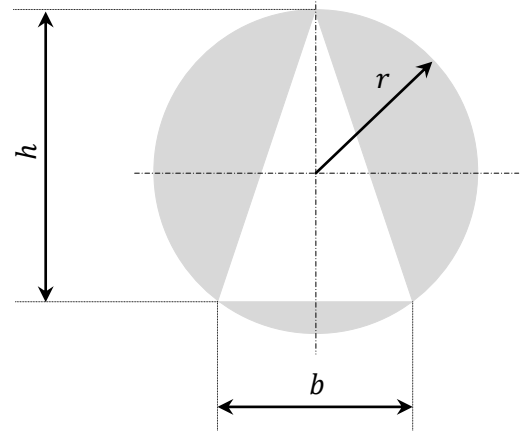
3. أوجد المساحة المثلثية المحددة بين الشعاعين \vec{F}_1 و \vec{F}_2 ؛

5. من أجل أي شرط على x و y ، يكون للشعاعين $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و \vec{S} نفس الحامل؟

II. أوجد مركز الثقل للشكل الملون بالرمادي (الشكل 1):.



الشكل 2



الشكل 1

التمرين 2 : (06 نقاط)

تتألف رافعة تقليدية من عارضة متجانسة كتلتها m وطولها l . تستند العارضة بحرية على سطح بناية في النقطة A ، حيث يقوم العامل بالضغط على العارضة لمنع افلاتها ولتثبيتها على الأرضية بقوة F عمودية على العارضة و مائلة بزاوية θ عن الأرضية.

على مسافة الثلثين $(3/2)$ من طولها تتمفصل العارضة بالنقطة B على حائط بارتفاع h على حافة الأرضية (الشكل 2).

بالطرف الآخر من العارضة، في النقطة C ، نربط حبلًا مهمل الكتلة بالنسبة لتوتره لرفع حمل Q كتلته c .

1. أوجد حوصلة القوى المؤثرة على العارضة للحفاظ على توازنها؛

2. أكتب علاقات شروط توازن العارضة وأوجد ردود الأفعال بالوصلتين A و B وكذلك توتر الخيط بالنقطة C ؛

3. أثبت أنه لو كانت العارضة مستندة بحرية، بالنقطة B ، فإن التوازن يكون مستحيلا بزاوية $\theta = 90^\circ$.

Corrigé de l'exercice 01 :**1. Dimension de R :**

$$F = \frac{h}{t} \cdot R \Rightarrow R = \frac{F}{h} \cdot t$$

$$\text{D'où : } [R] = \frac{[F]}{[h]} \cdot [t] = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L^{-1} \cdot T = M \cdot T^{-1}$$

2. Analyse dimensionnelle :

$$\mathbf{a} = R \cdot m \cdot t^2, \quad \text{avec } m : \text{ la masse.}$$

Cette formule est dimensionnellement correcte si elle correspond à sa forme dimensionnelle :

$$[\mathbf{a}]^\alpha \cdot [R]^\beta \cdot [m]^\gamma \cdot [t]^\delta = 1 \quad (*)$$

$$[\mathbf{a}] = M \cdot T^{-2}; [R] = M \cdot T^{-1}$$

Remplaçons les paramètres par ses dimensions de base :

$$(L \cdot T^{-2})^\alpha \cdot (M \cdot T^{-1})^\beta \cdot M^\gamma \cdot T^\delta = 1$$

Soit,

$$L^\alpha \cdot M^{\beta+\gamma} \cdot T^{-2\alpha-\beta+\delta} = 1$$

Les dimensions L , M et T sont de base. L'équation alors est physiquement impossible.

Mathématiquement, l'égalité est valide si et seulement si :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -\beta \\ -2\alpha - \beta + \delta = 0 \Rightarrow \delta = \beta \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation (*) en posant $\beta = 1$:

$$[\mathbf{a}]^0 \cdot [R] \cdot [m]^{-1} \cdot [t] = 1, \text{ d'où :}$$

La formule est incorrecte dimensionnellement. La dimension de l'accélération ne peut être exprimée par une dimension d'une masse.

Corrigé de l'exercice 02 :**I. Opérations sur les vecteurs :**

1. Vecteur produit vectoriel :

$$\vec{F}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}; \vec{F}_2 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k},$$

$$\vec{S} = \vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \vec{i} \\ 2 & \vec{j} \\ -1 & \vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & \vec{i} \\ -1 & \vec{j} \\ 2 & \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \vec{i} \\ -3 & \vec{j} \\ -3 & \vec{k} \end{pmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

2. \vec{S} peut être exprimé en fonction de $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$:

$$\vec{S} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k} = 3(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = 3\vec{u}$$

$$\|\vec{S}\| = 3\|\vec{u}\| = 3\sqrt{3}$$

On pose \vec{t} , un vecteur unitaire de \vec{S} , alors :

$$\vec{S} = \|\vec{S}\| \cdot \vec{t} = \|\vec{S}\| \cdot \frac{\vec{S}}{\|\vec{S}\|} = \|\vec{S}\| \cdot \frac{3\vec{u}}{3\sqrt{3}} = \|\vec{S}\| \cdot \frac{\vec{u}}{\sqrt{3}},$$

D'où :

$$\vec{t} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{3}} \text{ est un vecteur unitaire de } \vec{S}.$$

En conclusion : $\vec{S} = 3\vec{u} = 3\sqrt{3}\vec{t}$

3. Surface de l'aire triangulaire S_T limitée par \vec{F}_1 et \vec{F}_2 :

$$S_T = \frac{\|\vec{F}_1 \wedge \vec{F}_2\|}{2} = \frac{\|\vec{S}\|}{2} = \frac{3\|\vec{u}\|}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ unités de surface.}$$

4. Condition sur x et y pour que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et \vec{S} sont colinéaires :

$$\vec{v} \parallel \vec{S} \Rightarrow \vec{v} \circ \vec{S} = 0 \Leftrightarrow (x\vec{i} + y\vec{j}) \circ 3(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = 3x - 3y - 0 = 0,$$

Soit,

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y, \text{ qui est une équation d'une droite 1ère bissectrice.}$$

II. Détermination du barycentre :

Le corps plan est un disque, de surface S_1 de laquelle on a enlevé une surface triangulaire S_2 :

$$S = S_1 - S_2$$

A cause de la symétrie :

$$x_{G1} = x_{G2} = y_{G1} = 0,$$

$$y_{G1} = -\left(\frac{2}{3}h - r\right)$$

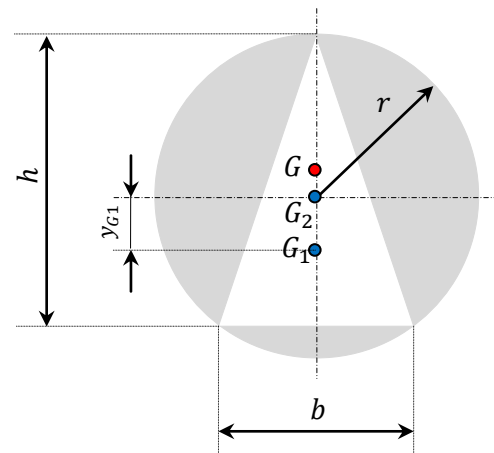
D'où :

$$x_G = \frac{x_{G1}S_1 - x_{G2}S_2}{S_1 - S_2} = 0,$$

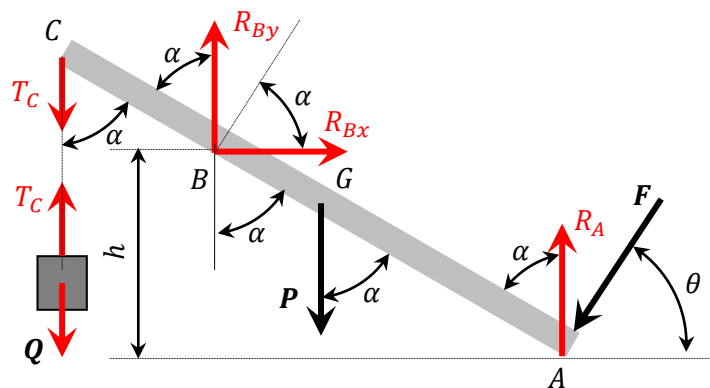
$$y_G = \frac{y_{G1}S_1 - y_{G2}S_2}{S_1 - S_2}$$

$$= \frac{0 \cdot \pi \cdot r^2 - \left[-\left(\frac{2}{3}h - r\right)\right] \cdot \frac{h \cdot b}{2}}{\pi \cdot r^2 - \frac{h \cdot b}{2}} = \frac{2b \cdot h^2 - 3b \cdot h \cdot r}{3(\pi \cdot r^2 - b \cdot h)}$$

$$y_G = \frac{2b \cdot h^2 - 3b \cdot h \cdot r}{3(\pi \cdot r^2 - b \cdot h)}$$



Corrigé de l'exercice 03 :



I. Articulation au point B :

1. Condition d'équilibre en translation de la barre :

$$\sum F_{ext/x} = 0 : R_{Bx} - F \cdot \cos \theta = 0 \Rightarrow R_{Bx} = F \cdot \cos \theta$$

2. Condition d'équilibre en translation de la charge :

$$\sum F_{ext/x} = 0 : T_C - Q = 0 \Rightarrow T_C = Q = m_C \cdot g$$

3. Condition d'équilibre en rotation de la barre :

$$\begin{aligned} \sum M_{ext}/A = 0 : \overline{GA} \wedge \vec{P} + \overline{CA} \wedge \vec{T}_C - \overline{BA} \wedge \vec{R}_{Bx} - \overline{BA} \wedge \vec{R}_{By} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{l}{2} \cdot P \cdot \sin \alpha + l \cdot T_C \cdot \sin \alpha - \frac{2l}{3} \cdot R_{Bx} \cdot \cos \alpha - \frac{2l}{3} \cdot R_{By} \cdot \sin \alpha &= 0 \\ \Rightarrow R_{By} = \frac{(\frac{P}{2} + T_C) \cdot \sin \alpha - \frac{2}{3} R_{Bx} \cdot \cos \alpha}{\frac{2}{3} \sin \alpha} = \frac{3}{2} \left(\frac{P}{2} + T_C \right) - R_{Bx} \cdot \cotg \alpha \\ R_{By} = \frac{3}{2} \left(\frac{m \cdot g}{2} + T_C \right) - R_{Bx} \cdot \cotg \alpha \end{aligned}$$

II. Appui simple au point B :

Condition d'équilibre en translation de la barre :

$$\sum F_{ext}/x = 0 : R_B \cdot \cos \alpha = 0,$$

Alors que R_B est supposée perpendiculaire à la barre $R_B \neq 0$.
L'équilibre est impossible. Le système devient un mécanisme.

Terminé, sauf erreur ou omission.