

Exercice 01 (4 points):

La force de Lorentz pour un point matériel d'une masse m , de charge électrique q soumis à un champ magnétique B et animé d'une vitesse v , est exprimée par la relation suivante :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Lorsque $\vec{v} \perp \vec{B}$, une relation, peut-être déduite pour exprimer la vitesse angulaire ω du point en fonction des autres paramètres, de la forme :

$$\omega = k \cdot m^\alpha \cdot q^\beta \cdot B^\gamma, \quad k \text{ est une constante.}$$

La vitesse angulaire peut-être exprimée en fonction de la période T_0 : $\omega = \frac{2\pi}{T_0}$

- En connaissant les unités de base de la force F , déterminer l'équation aux dimensions de B en fonction de $[M]$, $[T]$, et $[Q]$. $[Q]$ est la dimension de q .
- Déterminer les coefficients α , β , γ .

Corrigé :

L'équation aux dimensions de F est :

$$[F] = [q][v][B] = [Q] \cdot L \cdot T^{-1} \cdot [B]$$

D'autre part,

$$[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

D'où :

$$[B] = M \cdot T^{-1} [Q]^{-1}$$

L'équation aux dimensions de la vitesse angulaire est ω :

$$[\omega] = M^\alpha \cdot [Q]^\beta \cdot [B]^\gamma$$

D'autre part,

$$[\omega] = T^{-1}$$

En remplaçant l'expression de $[B]$:

$$M^\alpha \cdot [Q]^\beta \cdot [B]^\gamma = M^\alpha \cdot [Q]^\beta \cdot M \cdot T^{-1} [Q]^{-1}$$

D'où :

$$M^\alpha \cdot [Q]^\beta \cdot M^\gamma \cdot T^{-\gamma} [Q]^{-\gamma} = T^{-1}$$

Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - \gamma = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Soit :

$$\beta = \gamma = 1 \text{ et } \alpha = -1$$

D'où :

$$\omega = k \cdot \frac{q \cdot B}{m}$$

Terminé. Sauf erreur ou omission – OMAR (haioamar.com)

Exercice 02 (05 points):

On donne les composantes des vecteurs : $\vec{V}_1 = x\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{V}_2 = 2\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{V}_3 = 2\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$.

- Déterminer x et y pour que les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 soient colinéaires ;
- Déterminer z pour que les deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_3 soient perpendiculaires ;
- Déterminer $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$, $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$, $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3)$;
- Déduire la surface du triangle formé par \vec{V}_1 et \vec{V}_3 ;
- Déterminer le vecteur unitaire porté sur le support de \vec{V}_1 ;

Corrigé :

1. \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont colinéaires $\Rightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$

$$\begin{cases} x\vec{i} \\ 2\vec{j} \\ 1\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} 2\vec{i} \\ y\vec{j} \\ 2\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} 4 - y = 0 \\ 2 - 2x = 0 \\ xy - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ et } y = 4$$

2. \vec{V}_1 et \vec{V}_3 sont perpendiculaires $\Rightarrow \vec{V}_1 \circ \vec{V}_3 = 0$

$$(x\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) (2\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}) = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 2z = 0$$

D'où : $z = x + y = 5$

3.a. $\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2 = (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) (2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}) = 2 + 8 + 2 = 12$

3.b. $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ 2\vec{j} \\ 1\vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ -10\vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 - 4 = -24 \\ 2 + 10 = 12 \\ 4 - 4 = 0 \end{pmatrix}$

Soit : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 = -24\vec{i} + 12\vec{j}$

3.c. $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot \begin{pmatrix} 2\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ 2\vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2\vec{i} \\ 4\vec{j} \\ -10\vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 - 8 = -48\vec{i} \\ 4 + 20 = 24\vec{j} \\ 0 \end{pmatrix}$
 $= (\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})(-48\vec{i} + 24\vec{j}) = 0$

3.d. $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ 2\vec{j} \\ 1\vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -48\vec{i} \\ 24\vec{j} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24\vec{i} \\ -48\vec{j} \\ 120\vec{k} \end{pmatrix}$

4. La surface du triangle formé par \vec{V}_1 et \vec{V}_3 : $S_{t(v1,v3)} = \frac{1}{2} \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3\| = \sqrt{24^2 + 12^2} = 26,83$

5. Le vecteur unitaire porté sur le support de \vec{V}_1 :

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|} = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}, \|\vec{u}\| = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

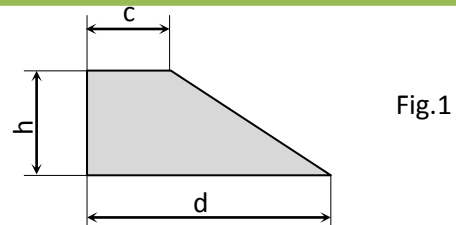
Terminé. Sauf erreur ou omission – OMAR (hajomar.com)

Exercice 03 (05 points) :

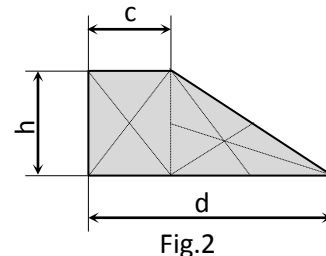
Déterminer le barycentre de la figure plane (fig.1) :

1. En décomposant la figure en tracés usuels.

2. En utilisant l'intégrale simple.

**Corrigé :**

$$\begin{cases} x_G = \frac{\sum_i x_{G_i} \cdot s_i}{\sum_i s_i} = \frac{x_{G_1} \cdot s_1 + x_{G_2} \cdot s_2}{s_1 + s_2} \\ y_G = \frac{\sum_i y_{G_i} \cdot s_i}{\sum_i s_i} = \frac{y_{G_1} \cdot s_1 + y_{G_2} \cdot s_2}{s_1 + s_2} \end{cases}$$



La figure peut-être décomposée en deux tracés usuels : un rectangle de cotés h et c et un triangle de hauteur h et de base (d-c). Les coordonnées des centres d gravités et les surface des figures usuelles sont comme suit :

$$x_{G_1} = \frac{c}{2}; y_{G_1} = \frac{h}{2};$$

$$x_{G_2} = c + \frac{d-c}{3}; y_{G_2} = \frac{h}{3}$$

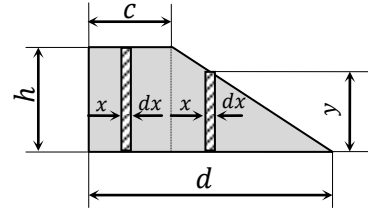
$$s_1 = c \cdot h; s_2 = (d - c) \cdot \frac{h}{2}$$

Les coordonnées du centre de gravité sont données par les formules :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\sum_i x_{G_i} \cdot s_i}{\sum_i s_i} = \frac{\frac{c}{2} \cdot c \cdot h + \left(c + \frac{d-c}{3}\right) \cdot (d-c) \cdot \frac{h}{2}}{c \cdot h + (d-c) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1}{3} \frac{c^2 + d^2 + cd}{c+d} \\ y_G = \frac{\sum_i y_{G_i} \cdot s_i}{\sum_i s_i} = \frac{\frac{h}{2} \cdot c \cdot h + \frac{h}{3} \cdot (d-c) \cdot \frac{h}{2}}{c \cdot h + (d-c) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{h}{3} \cdot \frac{2c+d}{d+c} \end{cases}$$

On peut aussi utiliser l'intégrale simple pour déterminer les coordonnées du barycentre :

$$\begin{cases} x_G = \frac{\int_S x \cdot ds}{\int_S ds} \\ y_G = \frac{\int_S y \cdot ds}{\int_S ds} \end{cases}$$



Pour déterminer x_G , divisons la figure en bandes élémentaires verticales, de largeur dx . Chaque bande a une surface $h \cdot dx$ pour le rectangle et $y \cdot dx$ pour le triangle. Ainsi, l'intégrale doit être divisée en deux parties, dont les bornes sont définies selon les deux intervalles : $x = [0, c]$ et $x = [c, d]$.

Puisque $ds = y \cdot dx$, on doit déterminer y en fonction de x , pour rendre l'intégrale simple. D'après la fig. on peut écrire :

$$\frac{y}{d-c-x} = \frac{h}{d-c} \Rightarrow y = \frac{h}{d-c} (d - c - x) = h - \frac{h}{d-c} \cdot x$$

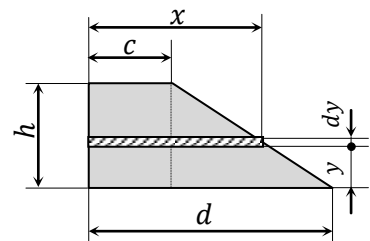
$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\int_{x=0}^c x \cdot h \cdot dx + \int_{x=c}^d x \cdot \left(h - \frac{h}{d-c} x\right) \cdot dx}{\int_{x=0}^c h \cdot dx + \int_{x=c}^d \left(h - \frac{h}{d-c} x\right) \cdot dx} = \frac{\int_{x=0}^c x \cdot h \cdot dx + \int_{x=c}^d x \cdot h \cdot dx - \int_{x=c}^d \frac{h}{d-c} x^2 \cdot dx}{\int_{x=0}^c h \cdot dx + \int_{x=c}^d h \cdot dx - \int_{x=c}^d \frac{h}{d-c} x \cdot dx} = \frac{\int_{x=0}^c x \cdot dx + \int_{x=c}^d x \cdot dx - \int_{x=c}^d \frac{1}{d-c} x^2 \cdot dx}{\int_{x=0}^c dx + \int_{x=c}^d dx - \int_{x=c}^d \frac{1}{d-c} x \cdot dx} \\ &= \frac{\frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2} - \frac{1}{d-c} \left(\frac{d^3}{3} - \frac{c^3}{3}\right)}{d - \frac{1}{d-c} \left(\frac{d^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right)} = \frac{\frac{d^2}{2} - \frac{1}{d-c} \left(\frac{d^3}{3} - \frac{c^3}{3}\right)}{c+d} = \frac{1}{3} \frac{c^2 + d^2 + cd}{c+d} \end{aligned}$$

De la même façon, on peut déterminer y_G en divisant la figure en bandes élémentaires horizontales, de largeur dy et de longueur x (fig.). Déterminons d'abord x en fonction de y :

$$\frac{x-c}{h-y} = \frac{d-c}{h} \Rightarrow x = c + (h-y) \frac{d-c}{h} = \frac{h \cdot d - (d-c)y}{h}$$

$$ds = x dy = \frac{h \cdot d - (d-c)y}{h} dy$$

$$y_G = \frac{\int_S \frac{h \cdot d - (d-c)y}{h} y \cdot dy}{\int_S \frac{h \cdot d - (d-c)y}{h} \cdot dy} = \frac{\int_{y=0}^h h \cdot d \cdot y - (d-c) \cdot y^2 \cdot dy}{\int_{y=0}^h h \cdot d - (d-c)y \cdot dy} = \frac{\frac{d}{2} \cdot h - (d-c) \cdot \frac{h}{3}}{d - \frac{(d-c)}{2}} = \frac{h}{3} \cdot \frac{2c+d}{d+c}$$



Terminé. Sauf erreur ou omission – OMAR (hajomar.com)

Exercice 04 (06 points) :

Pour élever une charge $m_1 = 50 \text{ kg}$, on utilise une potence de levage traditionnelle (fig. 2), constituée :

- d'une barre métallique homogène de longueur $AB = l = 3 \text{ m}$ et de masse $m = 10 \text{ kg}$. A mi-distance, la barre s'appuie sur le bord d'une dalle à une hauteur $h = 50 \text{ cm}$.
- d'un câble horizontal de poids négligeable devant la tension, passant par l'extrémité B pour s'attacher verticalement à la charge Q .

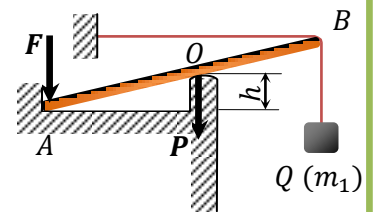


Fig.2

Remarque : On néglige le frottement dans les points d'appuis.

Pour éviter le glissement vertical de la barre, posée contre le mur et la dalle, on met une charge $m_2 = 150 \text{ kg}$ sur son extrémité A .

- 1) Faire un bilan des forces s'appliquant sur la barre.
- 2) Rappeler les conditions d'équilibre puis les exprimer en fonction des données du problème.
- 3) En déduire la valeur de la tension du câble et les réactions en A et B . On prend $g = 9.81 \text{ N/kg}$.

Corrigé :

Conditions d'équilibre :

$$\sum_i F_{i/x} = 0 : R_{Ax} - T_B - R_{Ox} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = T_B + R_{Ox} \quad (4.1)$$

$$\sum_i F_{i/y} = 0 : -P - Q - F + R_{Ay} + R_{Oy} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = P + Q + F - R_{Oy} \quad (4.2)$$

$$\sum_i M_{i/A} = 0 : \frac{l}{2} \cdot R_O + 2h \cdot T_B - d \cdot P - 2d \cdot Q = 0 \quad (4.3)$$

$$\sum_i M_{i/O} = 0 : -d \cdot R_{Ay} + h \cdot R_{Ax} + d \cdot F - d \cdot Q + 2h \cdot T_B = 0 \quad (4.4)$$

$$R_{Ox} = R_O \cdot \frac{2h}{l} \quad (4.5)$$

$$R_{Oy} = R_O \cdot \frac{d}{l} \quad (4.6)$$

$$d^2 + h^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow d = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - 4h^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 - 4 \cdot 0,5^2} = \sqrt{2}$$

De (4.1), (4.2), (4.4), (4.5) et (4.6) :

$$-d \cdot (P + Q + F - R_O \cdot \frac{d}{l}) + h \cdot (T_B + R_O \cdot \frac{2h}{l}) + d \cdot F - d \cdot Q + 2h \cdot T_B = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{l} + \frac{2h^2}{l}\right) R_O + 3h \cdot T_B - d \cdot P - 2d \cdot Q = 0 \quad (4.7)$$

Et de (4.3) :

$$\frac{l}{2} \cdot R_O + 2h \cdot T_B - d \cdot P - 2d \cdot Q = 0 \Rightarrow R_O = \frac{2}{l} (d \cdot P + 2d \cdot Q - 2h \cdot T_B) \quad (4.8)$$

En remplaçant dans (4.7) :

$$\left(\frac{d^2}{l} + \frac{2h^2}{l}\right) \cdot \frac{2}{l} \cdot (d \cdot P + 2d \cdot Q - 2h \cdot T_B) + 3h \cdot T_B - d \cdot P - 2d \cdot Q = 0$$

$$T_B \left\{ 3h - \left(\frac{d^2}{l} + \frac{2h^2}{l}\right) \cdot \frac{4h}{l} \right\} = 2d \cdot Q \left\{ \left(\frac{d^2}{l} + \frac{2h^2}{l}\right) \cdot \frac{2}{l} - 1 \right\} + d \cdot P \left\{ \left(\frac{d^2}{l} + \frac{2h^2}{l}\right) \cdot \frac{2}{l} - 1 \right\}$$

$$T_B = \frac{\left\{ \left(\frac{d^2}{l} + \frac{2h^2}{l}\right) \cdot \frac{2}{l} - 1 \right\}}{\left\{ 3h - \left(\frac{d^2}{l} + \frac{2h^2}{l}\right) \cdot \frac{4h}{l} \right\}} \cdot (2d \cdot Q + d \cdot P)$$

$$\frac{d^2}{l} + \frac{2h^2}{l} = \frac{d^2 + h^2}{l} + \frac{h^2}{l} = l + \frac{h^2}{l}$$

$$T_B = \frac{2h^2 + l^2}{4h^3 - l^2 \cdot h} \cdot (2d \cdot Q + d \cdot P)$$

$$R_O = \frac{2}{l} (d \cdot P + 2d \cdot Q - 2h \cdot T_B)$$

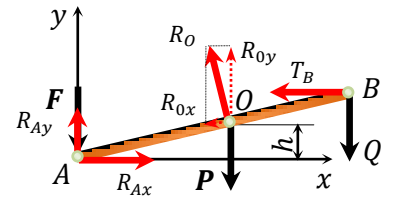
$$R_{Ax} = T_B + \frac{2h}{l} \cdot R_O$$

$$R_{Ay} = P + Q + F - \frac{d}{l} \cdot R_O$$

A.N.

$$P = m \cdot g = ; Q = m_1 \cdot g = ; F = m_2 \cdot g =$$

$$T_B = ; R_O = ; R_{Ax} = ; R_{Ay} =$$



Terminé. Sauf erreur ou omission – OMAR (hajomar.com)

*Ce document est en ébauche.**Merci de m'informer de toute erreur ou omission.*

Chargé du module : El-Hadj OMAR