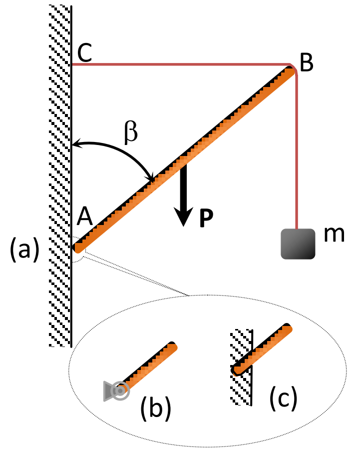
Exercice 01 :



1.a. Cas d'un appui simple :

Isolons la barre pour étudier son équilibre :

On pose $\vec{Q}' = \vec{P_c} + \vec{Q}$ (Poids du câble + Poids de la charge suspendue m).

2.a. Conditions d'équilibre :

$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{T_B} + \vec{R_A} = \vec{0} \qquad (3.1)$$

$$\sum_i \overrightarrow{M_{i/A}} = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{Q}' + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T_B} = \vec{0} \qquad (3.2)$$

3. a. Déterminations des inconnus :

Projections de (3.1) sur les axes des coordonnées Ax et Ay :

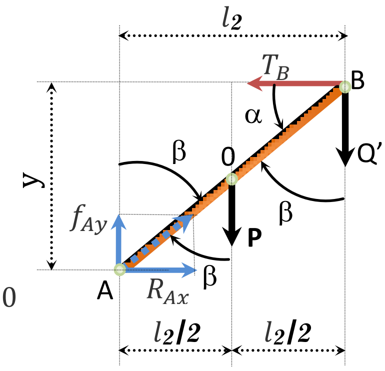
Projetons l'équation

$$\sum_i \vec{F}_{i/x} = T_B - R_A = 0 \implies R_A = T_B$$

$$\sum_i \vec{F}_{i/y} = -P - Q' = 0 \implies Un\ éuilibre\ impossible, car\ P + Q' \neq 0$$

Pour que la barre soit en équilibre, il faut appliquer une force opposée à $P + Q'$ qui n'est autre que la force de frottement, qu'on désigne par f_{Ay}. Dans ce cas, la force R_A sera la résultante de deux forces : R_{Ax} et f_{Ay}, comme illustré par la figure (3.1.a1).

Dans ce cas nous réécrivons les conditions d'équilibre comme suit :



(a)

$$\sum_i \vec{F}_{i/x} = T_B - R_{Ax} = 0 \implies R_{Ax} = T_B$$

$$\sum_i \vec{F}_{i/y} = -P - Q' + f_{Ay} = 0 \implies f_{Ay} = P + Q'$$

Pour déterminer R_{Ax} et T_B, on développe l'équation (3.2), comme suit :

$$\sum_i M_{/A} = -OA.P.\sin(\overrightarrow{AB}, \vec{P}) - AB.Q'.\sin(\overrightarrow{AB}, \vec{Q'}) + AB.T_B.\sin(\overrightarrow{AB}, \vec{T_B}) = 0$$

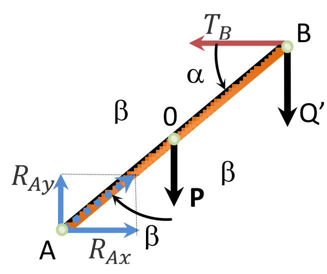
$$-\frac{l_1}{2}.P.\sin\beta - l_1.Q'.\sin\beta + l_1.T_B.\sin\alpha = 0$$

$$\sin\beta = \frac{l_2}{l_1}\ ; \sin\alpha = \frac{y}{l_1};\ y^2 + {l_2}^2 = {l_1}^2 \implies y = l_1 \sin\alpha = \sqrt{{l_1}^2 - {l_2}^2}$$

$$-\frac{l_1}{2}.P.\frac{l_2}{l_1} - l_1.Q'.\frac{l_2}{l_1} + T_B.\sqrt{{l_1}^2 - {l_2}^2} = 0 \implies T_B = R_{Ax} = \left(\frac{P}{2} + Q'\right).\frac{l_2}{\sqrt{{l_1}^2 - {l_2}^2}}$$

1.b. Cas d'une articulation :

L'articulation, comme montré par la fig. 3.1.b est remplacé par une réaction qui a de deux composantes R_{Ax} et R_{Ay} :



(b)

$R_{Ax} + R_{Ay} = R_A$

2.b. Les équations d'équilibre sont valides, en remplaçant f_{Ay} par R_{Ay}.

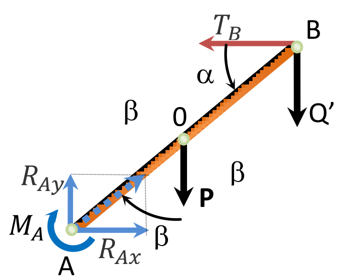
3.b. Il est clair que R_{Ay} peut remplacer f_{Ay} et dans ce cas, le même raisonnement est valable que celui du premier cas. Et nous avons comme résultats :

$$R_{Ay} = P + Q'$$

$$T_B = R_{Ax} = \left(\frac{P}{2} + Q'\right).\frac{l_2}{\sqrt{{l_1}^2 - {l_2}^2}}$$

1.c. Cas d'un encastrement (à revoir) :

S'ajoute aux réactions R_{Ax} et R_{Ay} dans l'encastrement, un moment M_A.



(c)

2. c. Les équations d'équilibre seront comme suit :

$$\sum_i \vec{F_i} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{T_B} + \vec{R_A} = \vec{0}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M_{i/A}} = \overrightarrow{AO} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{Q}' + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T_B} = \overrightarrow{M_A}$$

3. c. Déterminations des inconnus :

$$\sum_i \vec{F}_{i/x} = T_B - R_{Ax} = 0 \implies R_{Ax} = T_B$$

$$\sum_i \vec{F}_{i/y} = -P - Q' + f_{Ay} = 0 \implies R_{Ay} = P + Q'$$

$$-\frac{l_1}{2}.P.\frac{l_2}{l_1}-l_1.Q'.\frac{l_2}{l_1}+T_B.\sqrt{{l_1}^2-{l_2}^2}=M_A \qquad (3.3)$$

Nous avons ainsi trois équations à quatre inconnus : R_{Ax}, R_{Ay}, T_B et M_A, ce qui nécessite une autre équation. On peut utiliser l'équation suivante :

$$\sum_i \overrightarrow{M_{\iota/B}}=\overrightarrow{AO}\wedge\vec{P}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{Q'}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{T_B}+\overrightarrow{M_A}=\vec{0} \qquad (3.4)$$

Soit,

$$\sum_i M_{/A}= B0.P.\sin(\overrightarrow{B0},\vec{P})+BA.R_{Ax}.\sin\left(\overrightarrow{BA},\vec{R}_{Ax}\right)-BA.R_{Ay}.\sin\left(\overrightarrow{BA},\vec{R}_{Ay}\right)=0$$

$$P.\frac{l_2}{2}+R_{Ax}.\sqrt{{l_1}^2-{l_2}^2}-R_{Ay}.l_2=0 \Longrightarrow R_{Ax}=T_B=\frac{P}{2}+R_{Ay}.\frac{\sqrt{{l_1}^2-{l_2}^2}}{l_2}=\frac{P}{2}+(P+Q').\frac{\sqrt{{l_1}^2-{l_2}^2}}{l_2}$$

$$R_{Ax}=T_B==\frac{P}{2}+(P+Q').\frac{\sqrt{{l_1}^2-{l_2}^2}}{l_2}$$

Et de l'équation (3.3) :

$$-\frac{l_1}{2}.P.\frac{l_2}{l_1}-l_1.Q'.\frac{l_2}{l_1}+\frac{P}{2}\sqrt{{l_1}^2-{l_2}^2}+(P+Q').\frac{{l_1}^2-{l_2}^2}{l_2}=M_A$$

$$-P.\frac{l_2}{2}-Q'.l_2+\frac{P}{2}\sqrt{{l_1}^2-{l_2}^2}+(P+Q').\frac{{l_1}^2-{l_2}^2}{l_2}=M_A$$

$$M_A=Q'.\left\{\frac{{l_1}^2}{l_2}\right\}-P.\left\{\frac{\sqrt{{l_1}^2-{l_2}^2}}{2}+\frac{2{l_1}^2-{l_2}^2}{l_2}\right\}$$

Terminé : Sauf erreur ou omission – OMAR (hajomar.com).

Exercice 02 :

Valeur de la déportance pour assurer la stabilité de l'avion en vol :

Conditions d'équilibre :

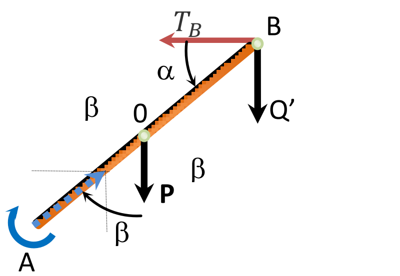
$\sum_i \vec{F_\iota}=\vec{P}+\vec{F}+\vec{F_z}=\vec{0}$

$\sum_i \overrightarrow{M_{\iota/E1}}=\overrightarrow{E_1G}\wedge\vec{P}+\overrightarrow{E_1E_2}\wedge\vec{F_z}=\vec{0}$

Projection sur l'axe vertical : $E_1E_2=d_1$, $GE_2=d_2$

$\sum_i F_{i/y}=0 :\ -P+F-F_z=0 \qquad (2.1)$

M_A



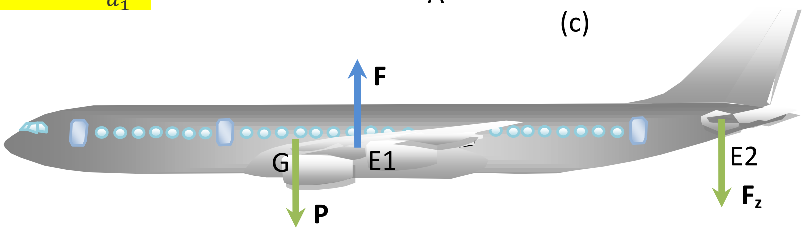
(c)

$\sum_i M_{i/E1}=(d_2-d_1).P+d_1.F_z=0 \Longrightarrow F_z=P.\frac{d_2-d_1}{d_1}$

Et de l'équation (2.1) :

$F=P+F_z \Longrightarrow F=P+P.\frac{d_2-d_1}{d_1}=P.\frac{d_2}{d_1}$

A.N.



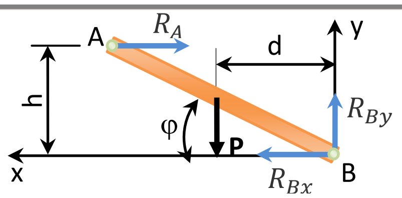
$F_z=250.10^3\,.9{,}81.\frac{32-30}{30}$

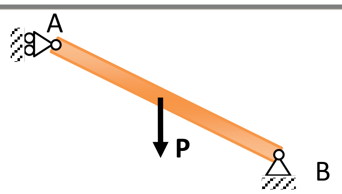
$F_z=\ 163{,}500\ tonnes$

Terminé : Sauf erreur ou omission – OMAR (hajomar.com).

Exercice 03 :

a.





Conditions d'équilibre :

$\sum_i F_{i/x}=0 :\ -R_A+R_{Bx}=0 \Longrightarrow R_{Bx}=R_A\ (3.1)$

$\sum_i F_{i/y}=0 :\ -P+R_{By}=0 \Longrightarrow R_{By}=P\ (3.2)$

$\sum_i M_{i/B}=0 :\ -h.R_A+d.P=0\ (3.3)$

On a :

$$\cos\varphi = \frac{2d}{AB} \Longrightarrow d = \frac{AB}{2}\cos\varphi$$

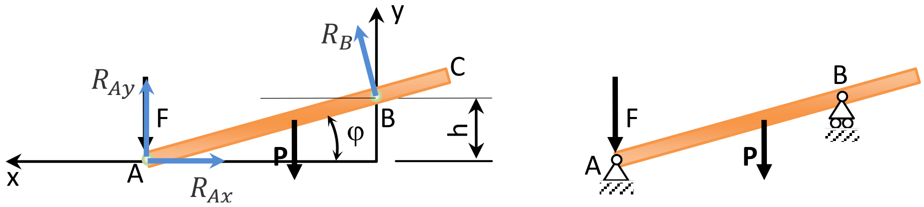
$$\sin\varphi = \frac{h}{AB} \Longrightarrow AB = \frac{h}{\sin\varphi}$$

D’où : $d = \frac{h}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{h}{2}\text{cotan}\,\varphi$

Remplaçons dans l’équation (3.3) :

$$-h.R_A + P.\frac{h}{2}\text{cotan}\,\varphi = 0 \Longrightarrow R_A = R_{Bx} = \frac{P}{2}\text{cotan}\,\varphi$$

b.



Conditions d’équilibre :

$AC = l$, $\sin\varphi = \frac{R_{Bx}}{R_B}$, $\cos\varphi = \frac{R_{By}}{R_B}$, tel que R_{Bx}, R_{By} : *composantes de* R_B *sur les axes de coordonnées.*

$$\sum_i F_{i/x} = 0 : -R_{Ax} + R_B.\sin\varphi = 0 \Longrightarrow R_{Ax} = R_B.\sin\varphi \qquad (3.4)$$

$$\sum_i F_{i/y} = 0 : -F - P + R_{Ay} + R_B.\cos\varphi = 0 \Longrightarrow R_{Ay} = P + F - R_B.\cos\varphi \ (3.5)$$

$$\sum_i M_{i/A} = 0 : -\frac{AC}{2}.P + AB.R_B = 0 \ (3.6)$$

On a :

$$\sin\varphi = \frac{h}{AB} \Longrightarrow AB = \frac{h}{\sin\varphi}$$

D’où, l’équation (3.6) devient :

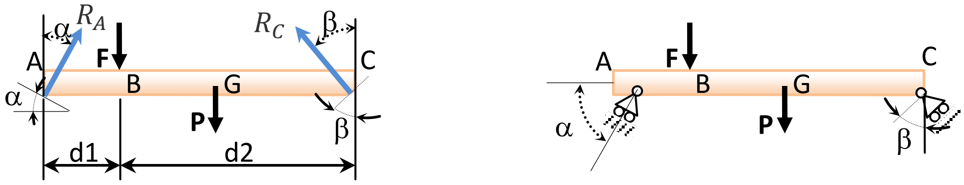
$$\sum_i M_{i/A} = 0 : -\frac{l}{2}.P + \frac{h}{\sin\varphi}R_B = 0 \Longrightarrow R_B = P.\frac{l}{2h}.\sin\varphi$$

D’où :

$$R_{Ax} = P.\frac{l}{2h}.\sin^2\varphi$$

$$R_{Ay} = F + P\left\{1 - .\frac{l}{2h}.\sin\varphi.\cos\varphi\right\}$$

c.



$$\sum_i F_{i/x} = 0 : -R_A\sin\alpha + R_C.\sin\beta = 0 \Longrightarrow R_A = R_C.\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad (3.7)$$

$$\sum_i F_{i/y} = 0 : -F - P + R_A\cos\alpha + R_C.\cos\beta = 0 \quad (3.8)$$

D’où :

$$-P - F + R_C.\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.\cos\alpha + R_C.\cos\beta = 0 \Longrightarrow R_C = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha.\cos\alpha + \sin\beta.\cos\beta}\,(P + F)$$

Et de (3.7) :

$$R_A = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha + \sin\beta.\cos\beta}\,(P + F)$$