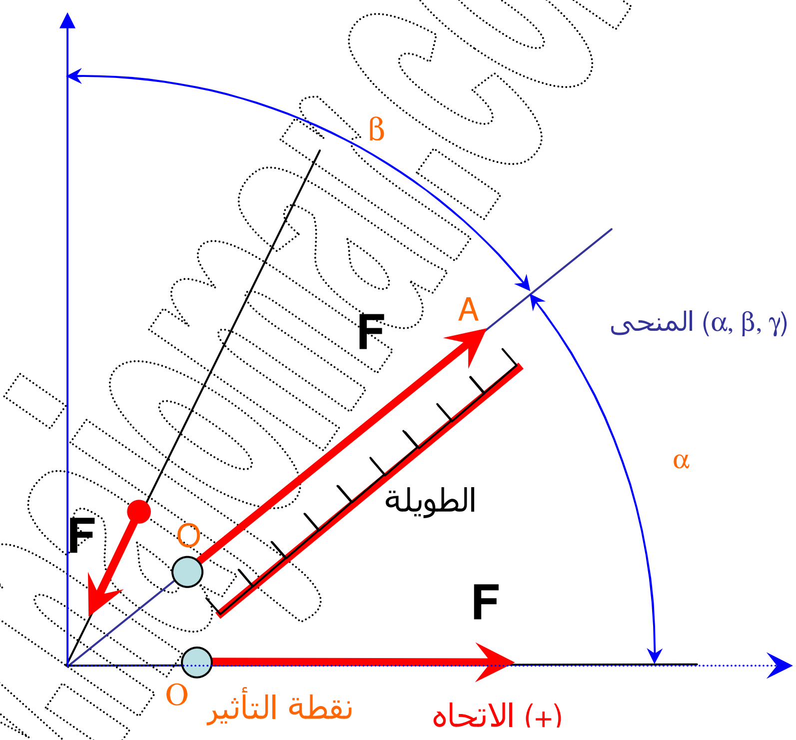
القوى :

فيزيائيا، القوة هي عبارة عن فعل يغير من حالة التوازن لجسم أو من شكله. وبذلك يمكنها توليد تسارع أو تباطؤ في حركته.

في الرياضيات، القوة هي شعاع معرف بعناصره التالية :

- نقطة التأثير (المبدأ)،
- المنحى (تموضع حامل الشعاع في الفضاء)،
- الاتجاه (بالنسبة لمحاور الإحداثيات سالب أو موجب)،
- الطويلة (قيمة الشعاع بوحدة القياس المستخدمة).

بيانيا : انظر الشكل.



II. 2. ملخص الحساب الشعاعي :

II.1.2. مركبات شعاع :

نعتبر المعلم المتعامدة والمتجانسة في الفضاء $\mathcal{R}^3$، الذي قاعدته $R_0(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$، التي تحقق :

$$\begin{cases} \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1 \\ \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0 \end{cases}$$

في هذا المعلم، يمكننا أن نمثل الشعاع بمركباته (x, y, z) :

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

الكتابة المعتمدة هي :

$$\vec{v} = \underset{R_0}{\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}}$$

II.2.2. القوانين الداخلية والخصائص :

الجمع الشعاعي :

نعرف ثلاث أشعة :

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} ,$$
$$v_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$
$$\vec{v}_3 = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

a. $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$. (الخاصية التبديلية).

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$
$$= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$
$$= (x_2 + x_1)\vec{i} + (y_2 + y_1)\vec{j} + (z_2 + z_1)\vec{k}$$

b. $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1) + \vec{v}_3$ (الخاصية التجميعية).

c. $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ (العنصر الحيادي).

d. $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ (العنصر النظير).

الضرب الشعاعي :

لدينا $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و λ_1 ، λ و λ_2 أعداد حقيقية.

$$\vec{w} = \lambda(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \lambda.x\vec{i} + \lambda.y\vec{j} + \lambda.z\vec{k}$$

a. $\lambda_1.\vec{v} + \lambda_2.\vec{v} = (\lambda_1 + \lambda_2).\vec{v}$ (الخاصة التوزيعية بالنسبة للجمع).

b. $\lambda.\vec{v}_1 + \lambda.\vec{v}_2 = \lambda.(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ (الخاصية التوزيعية بالنسبة للجمع الشعاعي).

c. $\lambda_1.\lambda_1.\vec{v} = \lambda_1.(\lambda_2.\vec{v})$ (الخاصية التجميعية بالنسبة للضرب).

المزج الشعاعي :

نقول عن n شعاع $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n$ في R^3، أنها مستقلة خطيا إذا كان فقط :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 , \forall\ i = \overline{1,n}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ...\lambda_n\vec{v}_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, ...\lambda_n = 0$$

إذا وجد على الأقل $i = \overline{1,n}$ ، $\lambda_i \neq 0$ نقول عن الأشعة أنها مرتبطة خطيا.

في هذه الحالة يمكن كتابة :

$$\vec{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{v}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{v}_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\vec{v}_n \Leftrightarrow \vec{v}_1 = \mu_2\vec{v}_2 + \mu_3\vec{v}_3 + ...\mu_n\vec{v}_n .$$

نقول عن $\vec{v}_1$ أنه مزج خطي للأشعة $\vec{v}_2, \vec{v}_3, ...\vec{v}_n$.

الارتباط الخطي في مجموعة أشعة يعني أن عدد الأبعاد يخفض إلى عدد الأشعة المستقلة خطيا.

مثال :

إذا كان $\vec{v}_1 = \mu_2\vec{v}_2 + \mu_3\vec{v}_3$ و $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ مستقلين خطيا (يشكلان مستو)، فإن الشعاع $\vec{v}_1$ ينتمي إلى هذا المستوى.

الجداء السلمي :

هو قانون داخلي يربط الجداء $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$ بقيمة عددية :

$$\forall\ \vec{v}_1 , \vec{v}_2 \in R^3\ \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 \in R$$
$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

إذا كان الشعاعان غير معدومين فإن الجداء السلمي المعدوم يعني أنهما متعامدان :

$\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$: $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

من أجل :

$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$,

$v_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

يعبر عن الجداء الشعاعي بـ :

$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \bullet (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3$

مقياس (طويلة) شعاع :

يعرف مقياس (طويلة) شعاع $\vec{v}$ بالقيمة :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$$

إذا كان :

$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,

فإن :

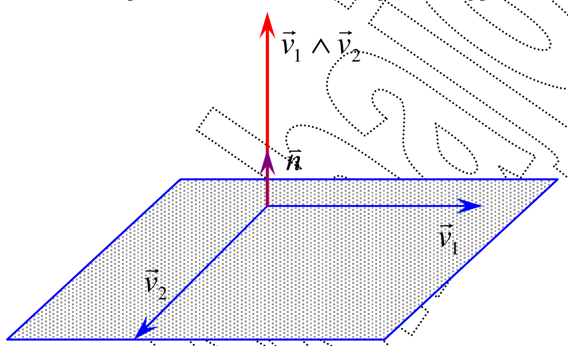
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

الجداء الشعاعي :

الجداء الشعاعي للشعاعين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ يعرف بـ :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\|.\|\vec{v}_2\|.\sin(\vec{v}_1, \vec{v}_2).\vec{n} ,$$

حيث $\vec{n}$، شعاع الوحدة المحمول على المحور العمودي على المستوي المشكل بالشعاعين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$.



إذا كان $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ فإن :

$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 // \vec{v}_2$,

نقول عن $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ انهما على خط واحد (متوازيان أو متطابقان) $\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_2$.

ومن أجل :

$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$,

$v_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

فإن الجداء الشعاعي يعبر عنه بالعلاقة التالية :

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{cases} x_1.\vec{i} \\ y_1.\vec{j} \\ z_1.\vec{k} \end{cases} \wedge \begin{cases} x_2.\vec{i} \\ y_2.\vec{j} \\ z_2.\vec{k} \end{cases} = \begin{cases} +(y_1.z_2 - z_1.y_2).\vec{i} \\ -(x_1.z_2 - z_1.x_2).\vec{j} \\ +(x_1.y_2 - y_1.x_2).\vec{k} \end{cases}$$

من خصائص الجداء الشعاعي أنه غير لا تناظري.

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$$

الجداء المختلط :

إذا كان :

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} ,$$
$$v_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$
$$\vec{v}_3 = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

فإن الجداء المختلط يعبر عنه بالعلاقة :

$$\vec{v}_1 \bullet (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = x_1.(y_2.z_3 - z_2.y_3) - y_1(x_2.z_3 - z_2.x_3) + z_1(x_2.y_3 - y_2.x_3)$$

الجداء المختلط هو قيمة عددية مساوية لحجم متوازي المستطيلات الذي أضلاعه هي الثلاث أشعة $\vec{v}_1$، $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$.

الجداء الشعاعي المزدوج :

يعرف بالعلاقة :

$$\vec{w} = \vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3)$$

يمكن ان نعبر عن الجداء الشعاعي المزدوج بدلالة $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$ (مزج خطي للشعاعين $\vec{v}_2$ و$\vec{v}_3$)، لأن الشعاع $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3$ و $\vec{v}_3$ وكذلك يكون الشعاع $\vec{w}$. الشعاع $\vec{w}$ ينتمي إلى المستوي المعرف بالشعاعين $\vec{v}_2$ و$\vec{v}_3$:

$$\vec{w} = \lambda\vec{v}_2 + \mu\vec{v}_3 , \ \lambda \text{ et } \mu \in R$$

الإسقاط العمودي للشعاع :

ليكن لدينا الشعاع $\vec{v}$ المعرف بشعاع وحدته $\vec{u}$ والشعاع $\vec{w}$ كيفي في الفضاء R^3.

إذا يمكننا أن نكتب :

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|.\vec{u} .$$

يعبر عن المسقط العمودي للشعاع $\vec{w}$ على الشعاع $\vec{v}$ بالعلاقة :

$$\vec{w}_v = (\vec{w} \bullet \vec{v}).\vec{u}$$

أو بشكل آخر :

$$\vec{w}_v = \|\vec{w}\|.\cos(\vec{w},\vec{v}).\vec{u} .$$

$\cos(\vec{w},\vec{v})$ تسمى موجهة الشعاع $\vec{w}$ بالنسبة للشعاع $\vec{v}$. يعين وجهة (منحى) الشعاع $\vec{w}$ بالنسبة للشعاع $\vec{v}$.

II.2.3. محصلة القوى :

لتكن لدينا جملة القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ... \vec{F}_n$ في الفضاء R^3. يسمى المجموع الشعاعي لجملة القوى محصلة.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$$

نظريا، يمكننا دراسة الجملة في معلم إسقاط متعامد ومتجانس لإيجاد مركبات المحصلة.

إذا كان :

$$\vec{F}_1 = F_{1x}.\vec{i} + F_{1y}.\vec{j} + F_{1z}.\vec{k} ,$$
$$\vec{F}_2 = F_{2x}.\vec{i} + F_{2y}.\vec{j} + F_{2z}.\vec{k}$$
$$...$$
$$\vec{F}_n = F_{nx}.\vec{i} + F_{ny}.\vec{j} + F_{nz}.\vec{k}$$

فإن :

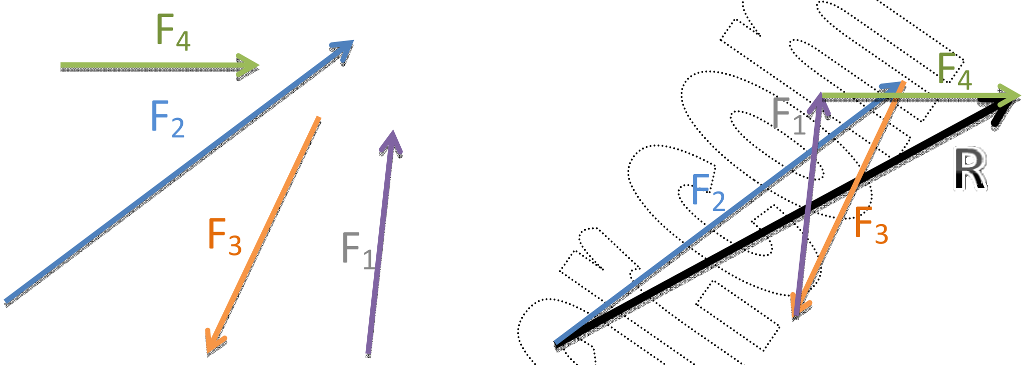
$$\vec{R} = (F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx}).\vec{i} + (F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny}).\vec{j} + (F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz}).\vec{k}$$

أو بشكل آخر :

$$\vec{R} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_{ix}\right).\vec{i} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iy}\right).\vec{j} + \left(\sum_{i=1}^{n} F_{iz}\right).\vec{k} = R_x.\vec{i} + R_y.\vec{j} + R_z.\vec{k}$$

بيانيا :

نستطيع إيجاد المحصلة بيانيا بإجراء انسحابات في فضاء الأشعة، بالتسلسل، بحيث نطبق نقطة مبدأ الشعاع على نهاية الشعاع الذي يسبقه. في الأخير، نربط بشعاع من نقطة مبدأ الشعاع الأول إلى نهاية الشعاع الأخير لرسم شعاع المحصلة.



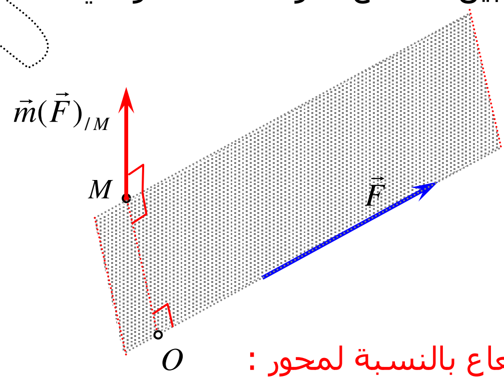
3.2.II. عزم قوى بالنسبة إلى نقطة :

عزم شعاع قوة $\vec{F}$، مبدأه A، بالتسبة لنقطة M، يرمز له بالرمز $\vec{m}(\vec{F})_{/M}$، يعبر عنه بالجداء الشعاعي :

$$\vec{m}(\vec{F})_{/M} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

بيانيا طويلة (مقياس) العزم $\left\|\vec{m}(\vec{F})_{/M}\right\|$ يكون مساويا لحاصل ضرب طويلة القوة في أصغر مسافة بين الشعاع $\vec{F}$ والنقطة M، أو في المسافة العمودية من النقطة M إلى الشعاع $\vec{F}$:

$$\left\|\vec{m}(\vec{F})_{/M}\right\| = OM.\left\|\vec{F}\right\|$$



عزم شعاع بالنسبة لمحور :

مسقط شعاع العزم بالنسبة لنقطة M ($\vec{m}(\vec{F})_{/M}$) على محور Δ الحامل لشعاع الوحدة $\vec{u}$ يسمى عزم شعاع القوة $\vec{F}$ بالنسبة للمحور Δ ($\vec{m}(\vec{F})_{/\Delta}$) ويعبر عنه بالعلاقة :

$$\vec{m}(\vec{F})_{/\Delta} = \left(\vec{m}(\vec{F})_{/M} \bullet \vec{u}\right)\vec{u}$$