Méthodes de résolution des équations non-linéaires

Introduction

Une équation non-linéaire est une équation qui ne peut prendre une forme linéaire, même sous forme d'un système d'équations linéaires, comme dans le cas d'un polynôme de degré supérieur à un, par quiconque transformation.

Les méthodes analytiques adoptées dans le cas de la non-linéarité sont généralement basées sur l'approximation et l'interpolation.

Le travail consiste en le choix d'une méthode numérique de résolution des équations non linéaires et/ou faire une comparaison des résultats avec les autres méthodes. Il s'agit d'implémenter les méthodes suivantes :

1. Méthode de la bissection (dichotomie)

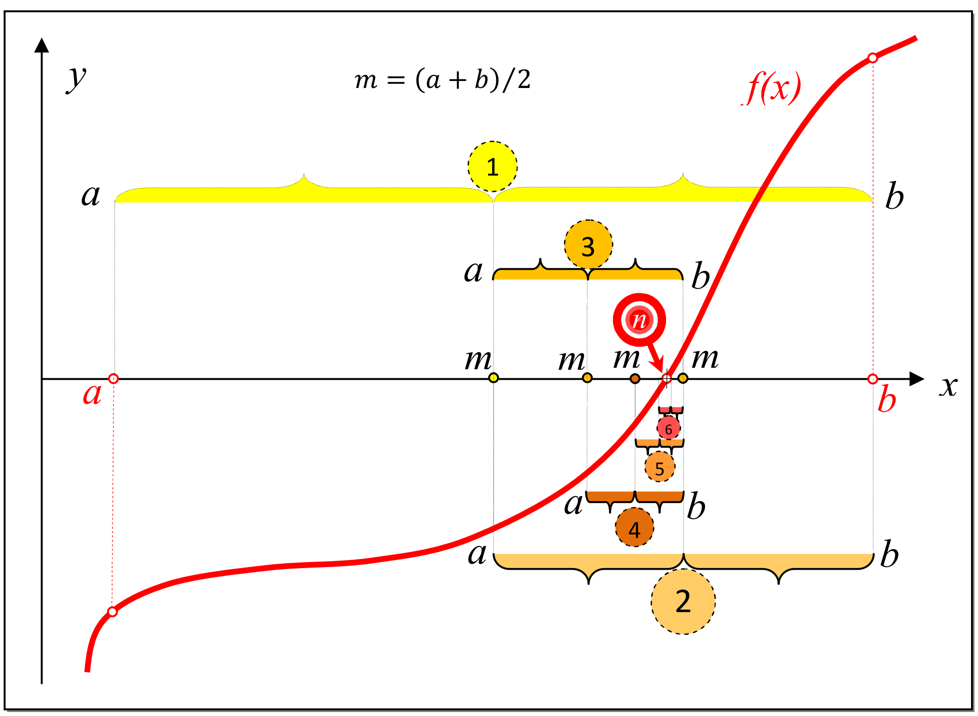
Condition : la fonction doit être continue sur l'intervalle [a,b] où se trouve la racine recherchée m.

Principe de la méthode : Isoler la racine m, après avoir sectionner l'intervalle [a,b] en deux parties égales : [a,m] ou [m,b] :

m ← (a+b)/2

La partie de l'intervalle, ou du sous intervalle, dans laquelle se trouve la racine, doit vérifier l'inéquation f(a)*f(m)<0 :

```
Si f(a)*f(m)<0 Alors
    b ← m
 Si non
    a ← m
Fin Si
```



Ainsi, on continue à sectionner le sous-intervalle qui contient la racine, en se rapprochant de celle-ci, par minimiser la distance entre a et b. Le point m sera l'estimation de la racine à la précision désirée abs(b - a)>Eps.

L'avantage de cette méthode est qu'elle est toujours convergente, mais son inconvénient c'est qu'elle souvent lente.

```
Définir f(x)
Eps ← !?
n ← 0
R ← %t
Tant que R ← %t faire
  a ← !?
  b ← !?
  Si f(a)*f(b)<0 Alors
    R ← %f
  Fin Si
Fin Tant que
Tant que abs(b - a)>Eps faire
  m ← (a+b)/2
  n← n+1
  Si f(a)*f(m)<0 Alors
    b ← m
  Si non
    a ← m
  Fin Si
Fin Tant que
Afficher (m,f(m),n))
```

Il est recommandé, pour un meilleur contrôle de l'erreur de remplacer (Tant que abs(b - a)>Eps Faire...) par (Tant que abs(f(a))>Eps Faire...).

Souvent on se limite à un certain nombre d'itérations pour minimiser le temps de calcul, ou changer l'intervalle [a,b] .

2. Méthode du point fixe

Consiste à modifier la façon dont il faut chercher la racine, par modifier la fonction f(x) = 0 en g(x) = x. Le premier terme présente une fonction continue dans l'intervalle contenant la racine [a,b]. Le second terme est la fonction première bissectrice qui est caractérisée par y = x (ordonnée = abscisse) pour toute x de R. La racine exacte est le point d'intersection des deux fonctions g(x) et x.

Principe de la méthode :

Choisir un x0 de [a,b] dont laquelle la fonction est continue, ensuite trouver la nouvelle estimation x1 à travers la première bissectrice par chercher g(x0). Alors g(x0)=x1. On continue ainsi à chercher xi+1 par déterminer g(xi), toujours à travers la fonction première bissectrice g(xi)=xi+1. Si la méthode est convergente pour la fonction f(x), la racine estimative, à la précision voulue, sera celle qui vérifie abs(x-x0)<= Eps. Avec x0= xi et x = xi+1.

L'inconvénient majeur de cette méthode c'est qu'elle est divergente pour les fonctions présentant une pente f'(x) >1 au voisinage de la racine. Par contre, elle est rapide en cas de son convergence.

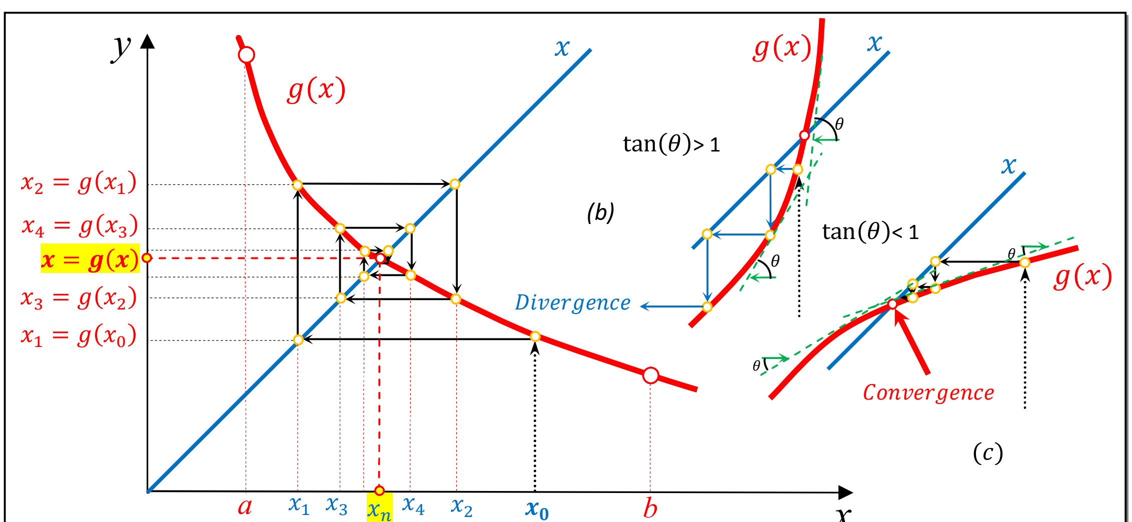


fig2 – (a)

```
Définir f(x)
Définir g(x)
Eps ← !?
R ← %t
Tant que R ← %t faire
  a ← !?
  b ← !?
  Si f(a)*f(b)<0 Alors
    R ← %f
  Fin Si
Fin Tant que
R ← %t
Tant que R ← %t faire
  x ← g(x)
  n ← n+1
  Si abs(x-x0)<= Eps Alors
    R ← %f
  Fin Si
x0 ← x
Fin Tant que
Afficher (x,f(x),n))
```

Il est possible de contrôler l'erreur par une simple boucle ***while*** en changeant le traitement dans la deuxième partie du programme comme suit :


```
Définir f(x)
Définir g(x)
Eps ← !?
R ← %t
Tant que R ← %t faire
  a ← !?
  b ← !?
  Si f(a)*f(b)<0 Alors
    R ← %f
  Fin Si
Fin Tant que
x←!?// 1ère itération
N←!? // Nbre d'itérations limite
Tant que abs(f(x))<= Eps faire
  x ← g(x)
  n ← n+1
  SI n←N then
     Sortir
  Fin SI
Fin Tant que
Afficher (x,f(x),n)
```

Dans le cas de la divergence de la méthode pour une fonction donnée, il est recommandé d'utiliser la fonction inverse $g^{-1}(x)$, car elle coupe la première bissectrice dans le même point $g^{-1}(x) = x$,.

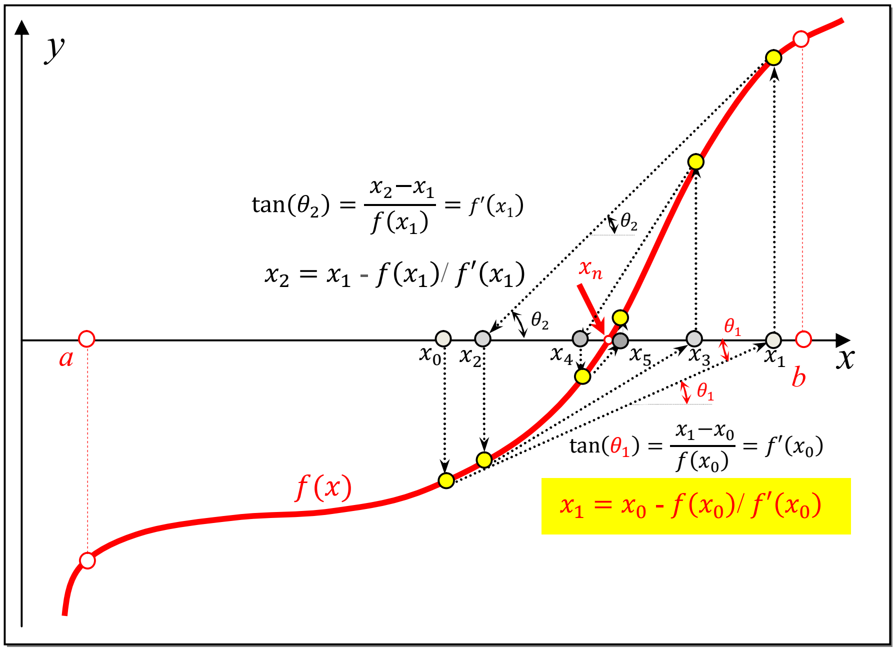
3. Méthode de Newton-Raphson

Cette méthode est basée sur la recherche de la solution à travers l'intersection de la pente de la fonction avec l'axe des abscisses, donc l'utilisation de la dérivée. Outre que la continuité dans un intervalle $[a, b]$, cette méthode nécessite la dérivabilité hormis d'autres conditions :

1. $f(a).f(b) \leq 0$: La fonction a une racine;
2. $\forall\, x \in [a, b], f'(x) \neq 0$: La fonction ne doit pas avoir une pente horizontale (fonction monotone). La fonction a une seule racine – racine unique dans une sous intervalle de traitement par la méthode;
3. $\forall\, x \in [a, b], f''(x) \neq 0$: la fonction doit être monotone,
4. $f(x_0).f''(x_0) > 0, montone$ même alternée.

Principe de la méthode :

Consiste à choisir une racine approchée initiale, en première itération, $x_0 \in [a, b]$, puis déterminer l'intersection de la pente en ce point de $f'(x_0)$ avec l'axe des abscisses pour avoir le point d'itération suivant $x_1 = x_0 - f(x_0)/ f'(x_0)$. On continue les itérations jusqu'à atteindre une racine approchée avec la précision demandée $f(x_i) \leq \varepsilon$.




```
Définir f(x)
Définir df(x)
Définir la fonction graphique pf(x1, x2, fn, pas)

Fonction Newton (xi, f, df, eps)
n ← 0;
X ← xi;
  Tant que (abs(f(X)) > eps) faire
    n ← n + 1;
    X ← X - f(X)/df(X);
  Fin Tant que
  xa ← X;
  nit ← n;
Fin Fonction
```

```
//programme principal
x1 ←-5.0;
x2 ← 5.0;
pas ← 0.1;
epsilon ← 1.0e-6;
Pf(x1,x2,f,pas);
x0 ← -4;
nit ← 0;
[xa,nit] = Newton(x0,f,df,epsilon);
Afficher (xa,nit);
```

Travail demandé :

1. Implémenter le programme de chaque méthode sous forme de fonctions Scilab;
2. Tracer le graphe de la fonction dans l'intervalle indiqué [a,b];
3. Ecrire le programme principal de telle sorte qu'il contient les instructions suivantes :
   - Définir les fonctions de l'équation non linéaire f(x) et sa dérivée f'(x)
   - Saisir le données : les bornes d'intervalles a et b, la première itération pour les méthodes du point fixe et de Newton, la précision du résultat attendue ou désirée (contrôle de l'erreur).
4. Faire une comparaison des résultats des trois méthodes sous forme d'un récapitulatif contenant le nombre d'itérations ou un message indiquant l'impossibilité d'appliquer la méthode en cas de divergence.