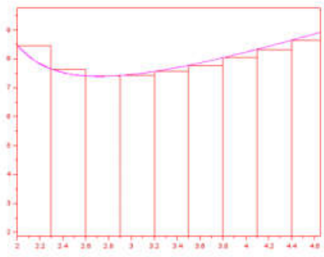
Intégration numérique

Algorithme des rectangles :

Données : a, b, n (borne inférieur, borne supérieur, nombre de points)

```
h ← (b-a)/n
sr=0
pour i← 0 à n-1 faire
      sr=sr+ h*f(a+i*h)
fin
afficher (sr)
```

$$Ir = \mathrm{h}.\sum_{i=0}^{n} f(a+i.\mathrm{h})$$

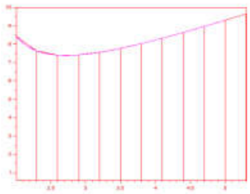


Algorithme des trapèzes :

Données : a, b, n (borne inférieur, borne supérieur, nombre de points)

```
h ← (b-a)/n
st=0
pour i← 1 à n-1 faire
      st=st+ (f(a)+f(a+i*h))*h/2
      a=a+h
fin
afficher (st)
```

$$It = \frac{\mathrm{h}}{2}.\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(a+i.\mathrm{h})+f(a+(i+1).\mathrm{h})\big)$$



Ou :

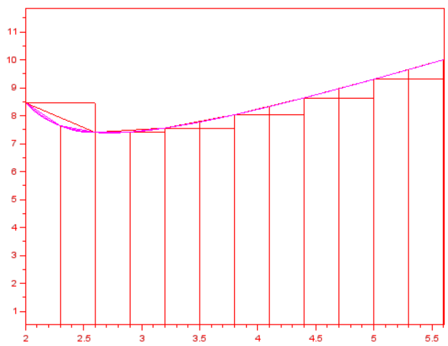
$$It = \frac{\mathrm{h}}{2}.\left(f(a)+\sum_{i=1}^{n-1}\big(f(a+i.\mathrm{h})+f(a+(i+1).\mathrm{h})\big)+f(b)\right)$$

Algorithme de Simpson :

Données : a, b, n (borne inférieur, borne supérieur, nombre de points)

```
h ← (b-a)/n
s1=0
s2=0
pour i← 1 à n-1 faire
      s1=s1+f(a+i*h)
fin
pour i← 1 à n faire
      s2=s2+f(a+(2*i-1)*h/2)
fin
Isimp=(h/6)*(f(a)+2*s1+4*s2+f(b))
afficher (Isimp)
```

$$It = \frac{\mathrm{h}}{6}.\left(f(a)+f(b)+2.\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i.\mathrm{h})+4.\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1).\mathrm{h}/2)\right)$$



Programme Scilab simplifié regroupant les trois méthodes :

```
clc,clear
deff ('[F]=f(x)','F=x*exp(1/log(x))')
a=input('a=!?')
b=input('b=!?')
n=input('n=!?')
h=(b-a)/n
Ir=h*(sum(feval(a+[0:n-1]*h,f)))
It=sum(h*((feval(a+[0:n-1]*h,f))+feval(a+[1:n]*h,f))/2)
Isimp=(h/6)*(f(a)+f(b)+2*sum(feval(a+[1:n]*h,f))+4*sum(feval(a+0.5*(2*[1:n]-1)*h,f)))
printf('Ir=%f',Ir)//résultat de la méthode des rectangles
printf(' It=%f',It)//résultat de la méthode des trapèzes
printf(' Isimp=%f',Isimp)//résultat de la méthode de Simpson
```

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x.e^{\frac{1}{\ln(x)}}.dx$$

Le travail demandé :

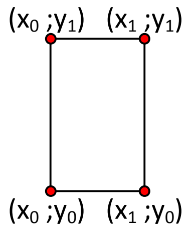
1. Convertir le programme en différentes fonctions (Rectangles, Trapèzes, Simpson);
2. Écrire le programme qui demande de saisir les données et faire le calcul du pas et appeler les différentes fonctions d'intégration numérique ainsi que l'affichage des résultats selon le choix (Rectangles, Trapèzes ou Simpson);
3. Tracés de la fonction réelle (voir HomeWork 1), des rectangles (méthode des rectangles), des trapèzes

…/…

(méthode des trapèzes) et les courbes de Simpson (en utilisant les polynômes de Lagrange);
4. Les polynômes de Lagrange (l'équation pour chaque sous-intervalle [a+i.h, a+(i+1).h], i=0,n-1);
5. Tracer les lignes passant des milieux des sous-intervalles de a+i.h à f(a+i.h) pour tout l'intervalle [a,b].

Indications sur le graphisme :

1. Tracé des polygones (rectangles et trapèzes) dans une boucle (i=0 :n-1) :



Le rectangles présentent 4 points : (x ;y) = (x_0 ;y_0), (x_0 ;y_1),(x_1 ;y_1), (x_1 ;y_0)

Et pour les trapèzes : (x_0 ;y_0), (x_0 ;y_1),(x_1 ;y_1), (x_1 ;y_0)

La syntaxe de l'instruction de tracé est la suivante :

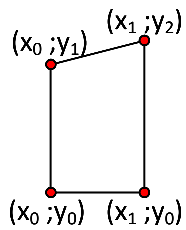
```
x=[ x0, x0, x1, x1],  y=[y0,y1,y2,y0]
xpoly(x,y,"lines",1) // tracé (polygone) fermé ou,
xpoly(x,y,"lines",0) // polygone (rectangle) ouvert.
```

Pour la méthode des rectangles, tel que i=0:n-1, on définit les rectangles comme suit :

```
x=[a+i*h,a+i*h,a+(i+1)*h,a+(i+1)*h],  y=[0,f(a+i*h),f(a+i*h),0]
```

Et pour la méthode des trapèzes, tel que i=0:n-1, on définit les trapèzes comme suit :

```
x=[a+i*h,a+i*h,a+(i+1)*h,a+(i+1)*h],  y=[0,f(a+i*h),f(a+(i+1)*h),0]
```



Si on veut appliquer une couleur spécifique pour le tracé, on ajoute l'instruction :

```
e=gce();
set(e,"foreground",5); //Couleur du polygone, "5" : code de la couleur rouge.
```

2. Tracé des courbes de Simpson (Polynômes de Lagrange) dans une boucle (i=0 :n-1) :

Formons d'abord les polynômes de Lagrange passant par trois points de la fonction réelle f(x) : u,m et v définis par :

```
u=a+i*h
v=a+(i+1)*h
m= a+(2*i+1)*h/2
```

On définit x comme une étant une variable renommé "t" dans l'expression du polynôme P de Lagrange :

```
x=poly(0,"t")
```

Le polynôme de Lagrange est défini comme suit :

```
P=f(u).*(x-v).*(x-m)./((u-v)*(u-m))+f(m).*(x-u).*(x-v)./((m-u)*(m-v))+f(v).*(x-u).*(x-m)./((v-u)*(v-m))
```

Qui peut-être présenté en résultat par :

```
disp(P)
```

Ce polynôme est peut-être évalué en utilisant la fonction :

```
horner(P,t)
```

3. Tracé des verticales passant par les points milieux (a+(2*i-1)*h/2) , dans une boucle (i=0 :n-1) :

On les définit comme étant des polygones à un seul côté (deux points) : q(xm;0)et z(xm;ym), soit sous Scilab:

```
z=[m,m],q=[0,f(m)]
xpoly(z,q,"lines",1)
```