

Le barycentre - Centre des masses.

Écrit par

Samedi, 04 Décembre 2010 09:08 - Mis à jour Samedi, 04 Décembre 2010 14:16

Le barycentre

Ce document est en ébauche. Il se peut qu'il contient des erreurs.

1. Coordonnées du barycentre

$$m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} + m_3 \overrightarrow{GA_3} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}$$

$$\overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}$$

$$\overrightarrow{GA_3} = \overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OG}$$

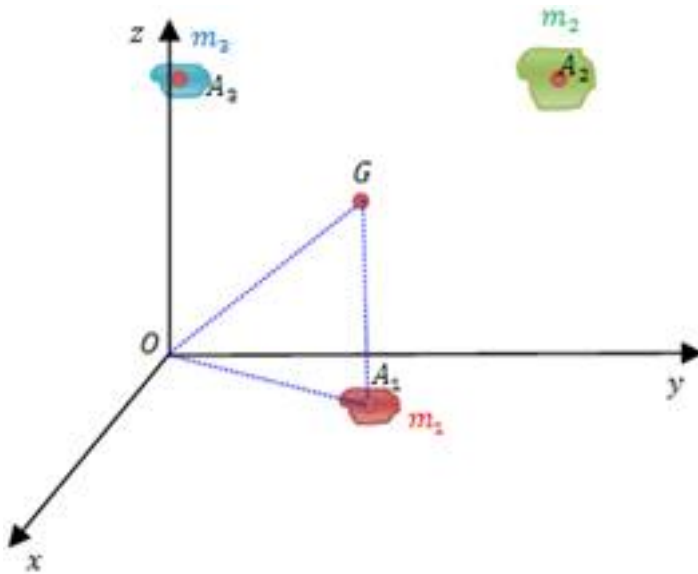
$$m_1 (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}) + m_2 (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}) + m_3 (\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$$

$$m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + m_3 \overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OG} (m_1 + m_2 + m_3)$$

Le barycentre - Centre des masses.

Écrit par □□□ □□□□□

Samedi, 04 Décembre 2010 09:08 - Mis à jour Samedi, 04 Décembre 2010 14:16



Alors,

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OA}_1 + m_2 \vec{OA}_2 + m_3 \vec{OA}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Et comme, $\vec{OG} = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$,
alors,

$$\begin{cases} x_G = \frac{m_1 x_{A1} + m_2 x_{A2} + m_3 x_{A3}}{m_1 + m_2 + m_3} \\ y_G = \frac{m_1 y_{A1} + m_2 y_{A2} + m_3 y_{A3}}{m_1 + m_2 + m_3} \\ z_G = \frac{m_1 z_{A1} + m_2 z_{A2} + m_3 z_{A3}}{m_1 + m_2 + m_3} \end{cases}$$

En utilisant l'écriture indicielle :

Le barycentre - Centre des masses.

Écrit par [redacted]

Samedi, 04 Décembre 2010 09:08 - Mis à jour Samedi, 04 Décembre 2010 14:16

$$x_{\text{CG}} = \frac{m_1 x_{1j} + m_2 x_{2j} + m_3 x_{3j}}{m_1 + m_2 + m_3}, j = 1, 2, 3$$

Dans le cas de n masses de coordonnées A_1, A_2, \dots, A_n , le centre de masses est déterminé par :

$$x_{\text{CG}} = \frac{m_1 x_{1j} + m_2 x_{2j} + \dots + m_n x_{nj}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, j = 1, 2, 3$$

Soit :

$$x_{\text{CG}} = \frac{\sum_j m_j x_{j} }{\sum_j m_j}, j = 1, 2, 3$$

Dans le cas d'un corps solide, les points A_j sont continus et peuvent être représentés par $M(x, y, z)$. Chaque point matériel M est pondéré par sa masse infinitésimale dm . Alors, la somme $\sum_j m_j x_{j}$ devient une intégrale $\int_V x \rho \, dv$

et puisque dm peut-être représentée par sa densité $\rho(x, y, z)$ et son volume $dv = dx \, dy \, dz$, soit $dm = \rho \, dv = \rho \, dx \, dy \, dz$.

Le barycentre - Centre des masses.

Écrit par [redacted]

Samedi, 04 Décembre 2010 09:08 - Mis à jour Samedi, 04 Décembre 2010 14:16

Ainsi, les coordonnées du centre de masses peuvent-être déterminées par :

$$x_{cm} = \frac{\int x \rho(x,y,z) dV}{\int \rho(x,y,z) dV}$$

2. Applications

Le centre de masse d'un cône plein :

Un cône peut être généré par Une masse infinitésimale :

$$dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dz$$

L'angle du cône est α

:

$$r = z \tan \alpha$$

;

Le barycentre - Centre des masses.

Écrit par

Samedi, 04 Décembre 2010 09:08 - Mis à jour Samedi, 04 Décembre 2010 14:16

$$r : 0 \text{ à } h \text{, } \text{tantur}$$

;

$$\theta : 0 \text{ à } 2\pi$$

Alors,

En faisant un changement de coordonnées :

$$x = r \cos \theta$$

;

$$y = r \sin \theta$$

;

$$z = 0 \text{ à } h$$

D'où :

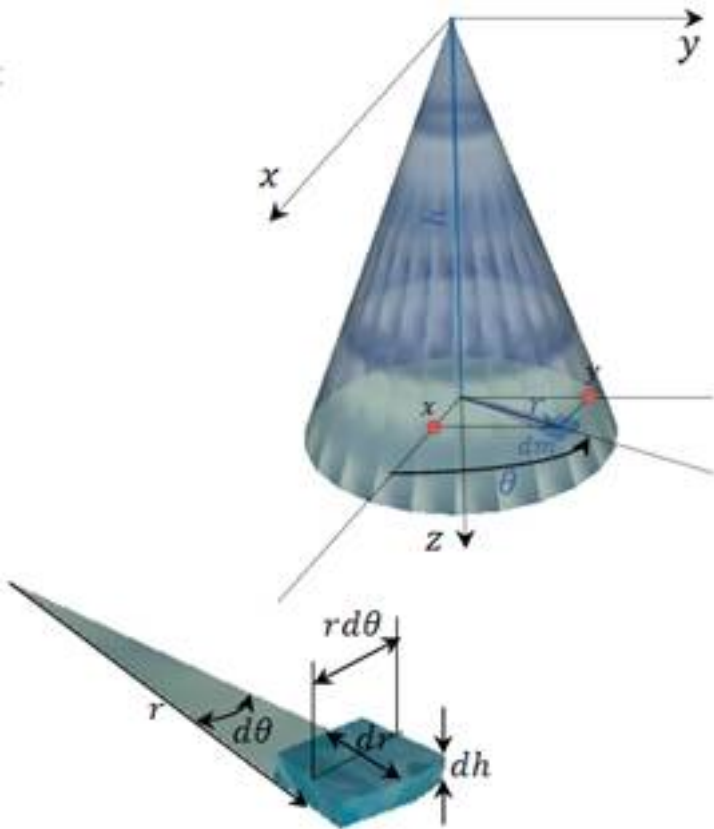
$$x_G = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^h r \cos \theta \, r \, dr \, dz \, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^h r \, dr \, dz \, d\theta} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^h r \sin \theta \, r \, dr \, dz \, d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^h r \, dr \, dz \, d\theta} = 0$$

Le barycentre - Centre des masses.

Écrit par [nom] [prénom]

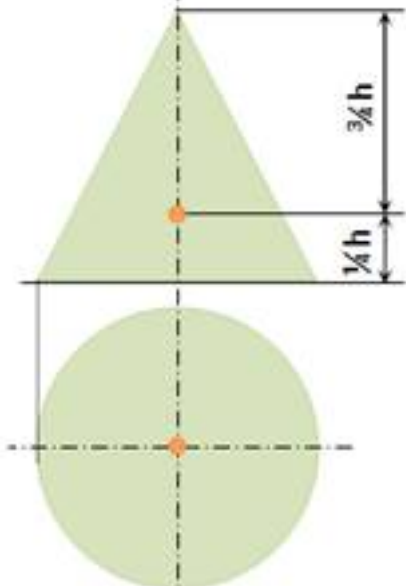
Samedi, 04 Décembre 2010 09:08 - Mis à jour Samedi, 04 Décembre 2010 14:16



$$V_G = \frac{\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2 \theta \, dr \, d\theta \, dz}{\int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r \sin \theta \, dr \, d\theta \, dz} = \frac{2\pi \int_0^h \left[\frac{r^3 \sin^2 \theta}{3} \right]_0^R dz}{2\pi \int_0^h \left[\frac{r^2 \sin \theta}{2} \right]_0^R dz} = \frac{\frac{2\pi R^3 \sin^2 \theta}{3} \int_0^h dz}{\frac{2\pi R^2 \sin \theta}{2} \int_0^h dz} = \frac{2}{3} h$$

Soit de

~~3. Position métrique de G est égale à la moitié de la hauteur de la base~~



2.1. Cas du triangle

$$\tan \alpha = \frac{y}{x-z}$$

$$y = (h-z) \tan \alpha + z \tan \beta$$

Le barycentre - Centre des masses.

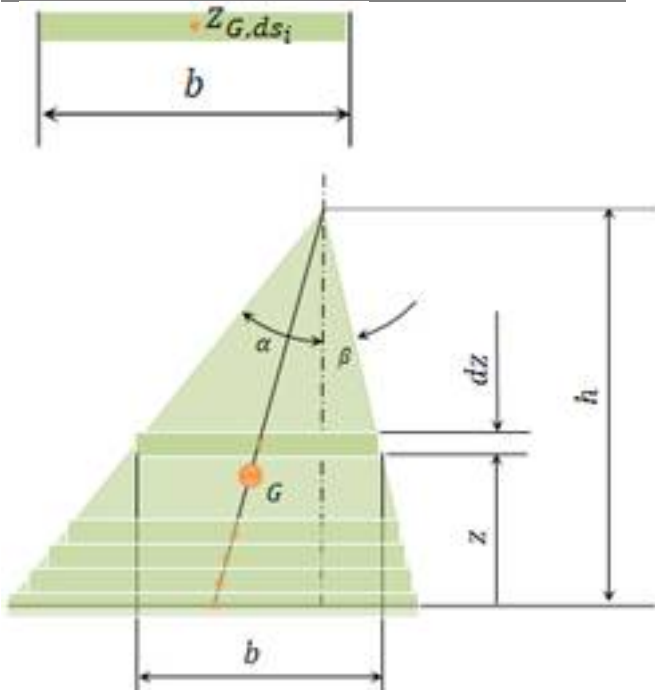
Écrit par □□□ □□□□□

Samedi, 04 Décembre 2010 09:08 - Mis à jour Samedi, 04 Décembre 2010 14:16

$$z_G = \frac{\int_0^h z \, ds}{\int_0^h ds} = \frac{\int_0^h z \cdot 2z \, dz}{\int_0^h 2z \, dz}$$

$$\frac{\int_0^h z \cdot 2(2h-z) [\tan\alpha + \tan\beta] \, dz}{\int_0^h 2(2h-z) [\tan\alpha + \tan\beta] \, dz}$$

$$\frac{\int_0^h z \cdot (2h-z) \, dz}{\int_0^h (2h-z) \, dz} = \frac{\frac{h^3}{2} \cdot h - \frac{h^3}{3}}{\frac{h^2}{2} \cdot 2} = \frac{\frac{h^4}{6}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{h}{3}$$



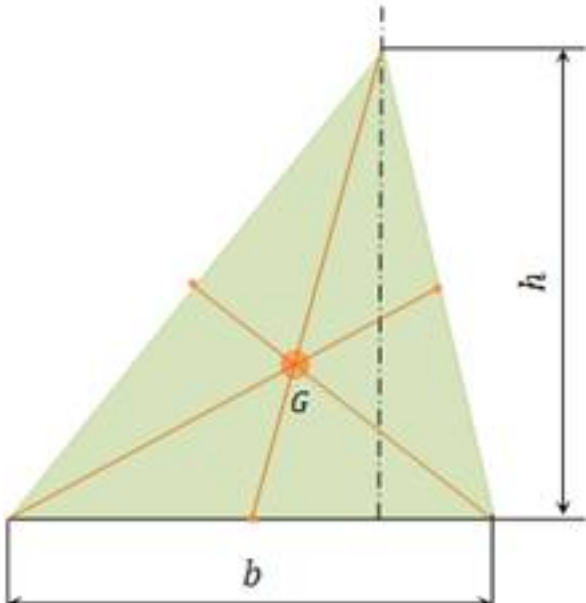
3.2. Méthode graphique surface rectangle infinitésimale
 , le centre de gravité se trouve à sa moitié

. Ainsi, le barycentre se trouve sur la droite que trace chaque centre de ces petites surfaces rectangula

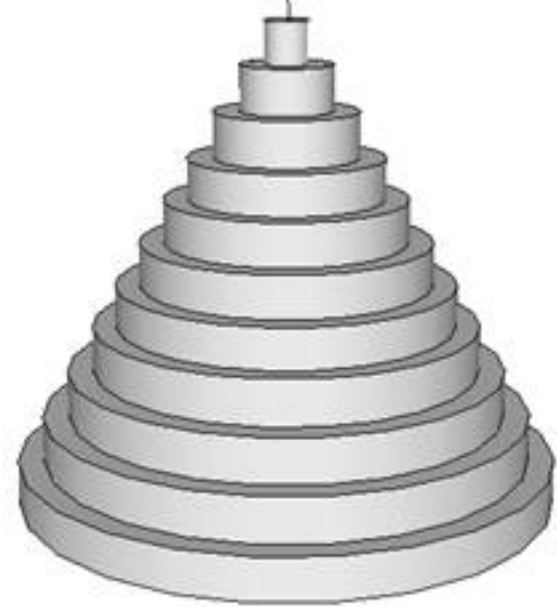
Le barycentre - Centre des masses.

Écrit par [] [] [] [] [] []

Samedi, 04 Décembre 2010 09:08 - Mis à jour Samedi, 04 Décembre 2010 14:16



1) D'après le théorème de Steiner, le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à l'axe central, par un point 'a' à distance 'a' de l'axe central, est égal à la somme du moment d'inertie par rapport à l'axe central plus la masse multipliée par le carré de la distance 'a'.



$$dm = \pi r^2 \rho dz = \pi (R-z)^2 \left[\tan^2 \frac{\alpha}{2} \right] \rho dz$$

D'où, on peut réduire l'intégrale :

$$Z_G = \frac{\int_0^h z dm}{\int_0^h dm}$$

En simplifiant :

$$Z_G = \frac{\int_0^h z (R-z)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} \rho dz}{\int_0^h (R-z)^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} \rho dz} = \frac{\int_0^h z (R^2 - 2Rz + z^2) dz}{\int_0^h (R^2 - 2Rz + z^2) dz} = \frac{R^2 \frac{h^2}{2} - 2R \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4}}{R^2 h - 2R \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}} = \frac{R^2 \frac{h^2}{2} - 2R \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4}}{R^2 h - R h^2 + \frac{h^3}{3}}$$

OMAR El-Hadj (Dernière mise à jour : 04/12/2010)