Le barycentre

Ce document est en ébauche. Il se peut qu'il contient des erreurs.

1. Coordonnées du barycentre

$$m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} + m_3\overrightarrow{GA_3} = \vec{0}$$

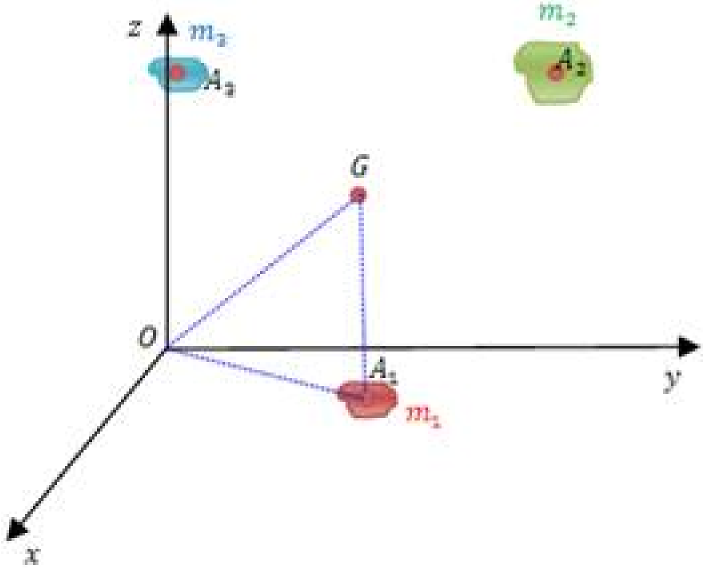
$$\overrightarrow{GA_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}$$

$$\overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}$$

$$\overrightarrow{GA_3} = \overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OG}$$

$$m_1(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OG}) + m_2(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OG}) + m_3(\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$$

$$m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + m_3\overrightarrow{OA_3} = \overrightarrow{OG}(m_1 + m_2 + m_3)$$



Alors,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + m_3\overrightarrow{OA_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Et comme, $\overrightarrow{OG} = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}$
, alors,

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{m_1x_{A_1} + m_2x_{A_2} + m_3x_{A_3}}{m_1 + m_2 + m_3} \\ y_G = \dfrac{m_1y_{A_1} + m_2y_{A_2} + m_3y_{A_3}}{m_1 + m_2 + m_3} \\ z_G = \dfrac{m_1z_{A_1} + m_2z_{A_2} + m_3z_{A_3}}{m_1 + m_2 + m_3} \end{cases}$$

En utilisant l’écriture indicielle :

$$x_{jG} = \frac{m_1 x_{jA_1} + m_2 x_{jA_2} + m_3 x_{jA_3}}{m_1 + m_2 + m_3}, j = \overline{1,3}$$

Dans le cas de n masses de coordonnées $A_1, A_2, \ldots, A_n$, le centre de masses est déterminé par :

$$x_{jG} = \frac{m_1 x_{jA_1} + m_2 x_{jA_2} + \cdots + m_n x_{jA_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, j = \overline{1,3}$$

Soit :

$$x_{jG} = \frac{\sum_1^n m_i x_{jA_i}}{\sum_1^n m_i}, j = \overline{1,3}$$

Dans le cas d’un corps solide, les points A_i sont continus et peuvent être représentés par $M(x, y, z)$. Chaque point matériel M est pondéré par sa masse infinitésimale dm. Alors, la somme $\sum_1^n m_i x_{jA_i}$ devient une intégrale $\frac{\int_S x_j dm}{\int_S dm}$ et puisque dm peut-être représentée par sa densité $\rho(x, y, z)$ et son volume $dv = dxdydz$, soit $dm = \rho dv = \rho . dxdydz$.

Ainsi, les coordonnées du centre de masses peuvent-être déterminées par :

$$y_G = \frac{\iiint_S y\,\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_S \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

---

2. Applications

Le centre de masse d'un cône plein :

Un cône peut être généré par Une masse infinitésimale :

$$dm = \rho dv = \rho.dr.dh.r.d\theta$$

L'angle du cône est α
:

$h = 0$ à h
;

$r : 0 \text{ à } h.\tan\alpha$

; $\theta : 0 \text{ à } 2\pi$

Alors,

En faisant un changement de coordonnées :

$x = r\cos\theta$

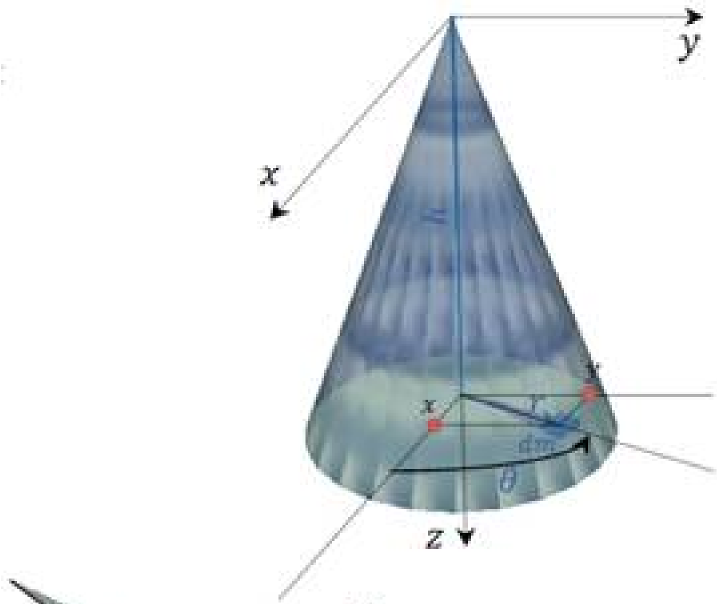
; $y = r\sin\theta$

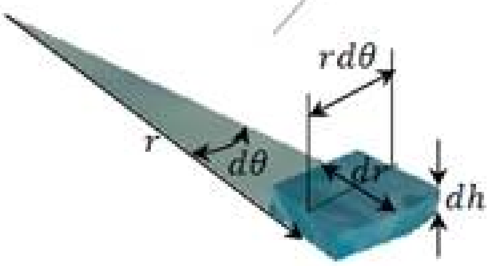
; $z = 0 \text{ à } h$

D’où :

$$x_G = \frac{\int_0^{2\pi}\cos\theta.d\theta\int_0^{h}\left[\int_0^{z.\tan\alpha} r^2.dr\right]dz}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{h}\left[\int_0^{z.\tan\alpha} r.dr\right]dz} = 0$$

$$y_G = \frac{\int_0^{2\pi}\sin\theta.d\theta\int_0^{h}\left[\int_0^{z.\tan\alpha} r^2.dr\right]dz}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{h}\left[\int_0^{z.\tan\alpha} r.dr\right]dz} = 0$$

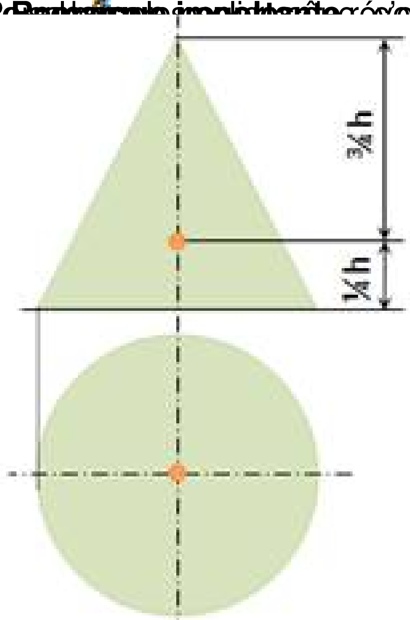




$$z_G = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{H} \left[\int_0^{h\tan\alpha} r\,dr\right] h\,dh}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{H} \left[\int_0^{h\tan\alpha} r\,dr\right] dh} = \frac{2\pi \int_0^{H} \left[\frac{h^2\tan^2\alpha}{2}\right] h\,dh}{2\pi \int_0^{H} \left[\frac{h^2\tan^2\alpha}{2}\right] dh} = \frac{\frac{H^4\tan^2\alpha}{4}}{\frac{H^3\tan^2\alpha}{3}} = \frac{3}{4}H$$

Soit de $\frac{3}{4}$

3 Problème plan Pour les solides de révolution symétriques, c'est-à-dire, il est plus aisé de ... faux de déterminer le barycentre des corps ...



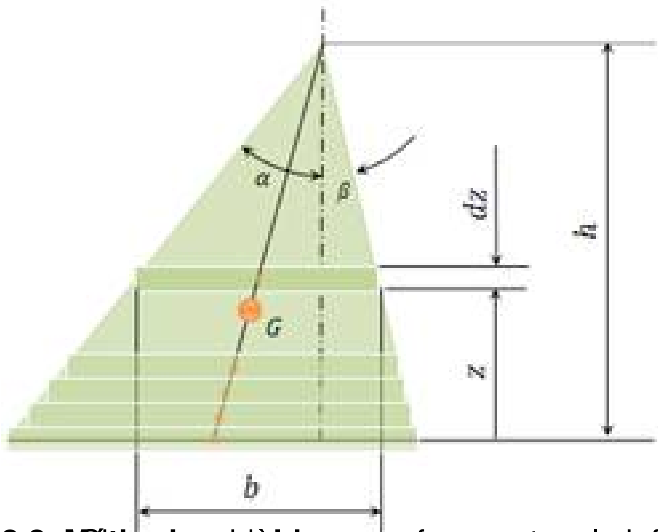
3.1. Cas du triangle

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{h-z}$$

$\Longrightarrow$

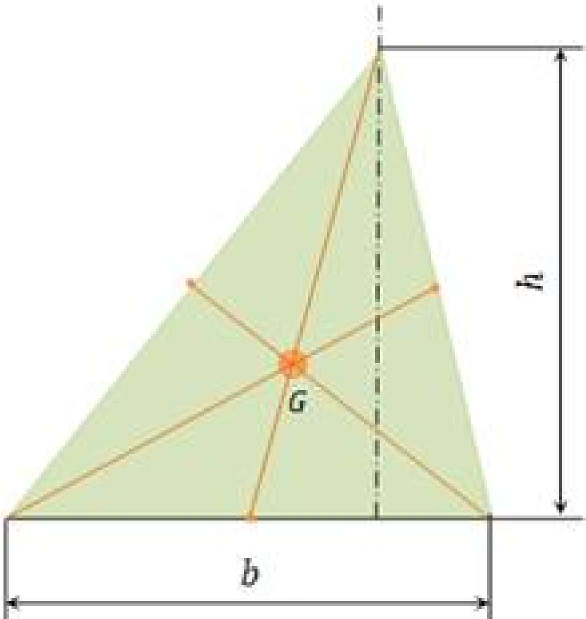
$$b = (h-z)[\tan\alpha + \tan\beta]$$

$$z_G = \frac{\iint_s z\,ds}{\iint_s ds} = \frac{\iint_s z.2x.dz}{\iint_s 2x.dz}$$
$$= \frac{\int_0^h z.2(h-z)[\tan\alpha + \tan\beta].dz}{\int_0^h 2(h-z)[\tan\alpha + \tan\beta].dz}$$
$$= \frac{\int_0^h z.(h-z)dz}{\int_0^h (h-z)dz} = \frac{\frac{h^2}{2}.h - \frac{h^3}{3}}{h^2 - \frac{h^2}{2}} = \frac{\frac{h^3}{6}}{\frac{h^2}{2}} = \frac{h}{3}$$

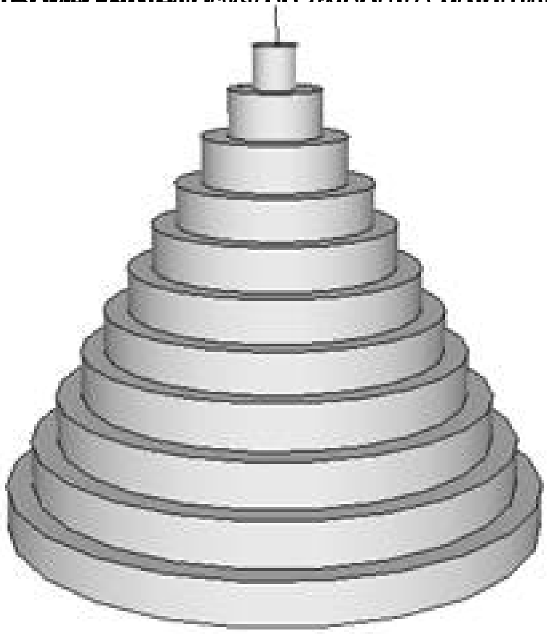


3.2. Méthode graphique

Si on considère une surface rectangle infinitésimale ds_i, le centre de gravité se trouve à sa moitie $\left(\frac{b}{2}\right)$. Ainsi, le barycentre se trouve sur la droite que trace chaque centre de ces petites surfaces rectangula



[illegible] du chaque parcelle (disque) [illegible] petite pa



$$dv = \pi r^2 . dz = \pi(h-z)^2 \left[\tan\frac{\alpha}{2}\right]^2 dz$$

D'où, on peut réduire l'intégrale :

$$z_G = \frac{\iiint_C z\,dv}{\iiint_C dv}$$

En simplement :

$$z_G = \frac{\int_0^h z(h-z)^2\left[\tan\frac{\alpha}{2}\right]^2 dz}{\int_0^h (h-z)^2\left[\tan\frac{\alpha}{2}\right]^2 dz} = \frac{\int_0^h z(h-z)^2 dz}{\int_0^h (h-z)^2 dz} = \frac{\int_0^h (zh^2+z^3-2hz^2)\,dz}{\int_0^h (h^2+z^2-2hz)\,dz} = \frac{h}{4}$$

OMAR El-Hadj (Dernière mise à jour : 04/12/2010)