Intégration numérique - Méthode de Simpson (niveau 2)

Application (Utiliser un tableur - Excel) :

Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x^2}}{\sin x}$ en utilisant huit points (n = 8).

Corrigé :

1. Calcul du pas h :

$$h = \frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{n}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}{8} = \frac{\pi}{32} = 0{,}09817477$$

2. Calcul des valeurs de la fonction dans les différents points :

i	x_i	$f(x_i)$	Coef.	$f(x_i) * Coef.$
0	0,78539816	2,6206539	1	2,6206539
1	0,88357293	2,82402688	4	11,2961075
2	0,9817477	3,15310941	2	6,30621883
3	1,07992247	3,63964099	4	14,558564
4	1,17809725	4,336583	2	8,673166
5	1,27627202	5,32751282	4	21,3100513
6	1,37444679	6,74300512	2	13,4860102
7	1,47262156	8,78847455	4	35,1538982
8	1,57079633	11,7917614	1	11,7917614
$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x^2}}{\sin x} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i\ (impair\ )=1}^{i=7} f(x_i) + 2\sum_{i\ (pair\ )=2}^{i=6} f(x_i) + f(x_8)\right]$				**12,2911309**

On remarque que $x_{i+1} = x_i + \frac{\pi}{32} = x_i + 0{,}09817477$, pour $i = 1$ à 8.

soit $x_{i+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{32}.i = 0{,}78539816 + 0{,}09817477.i$, pour $i = 0$ à 8.

Et c'est la formule qu'on utilise dans un tableur.

3. Formule généralisée :

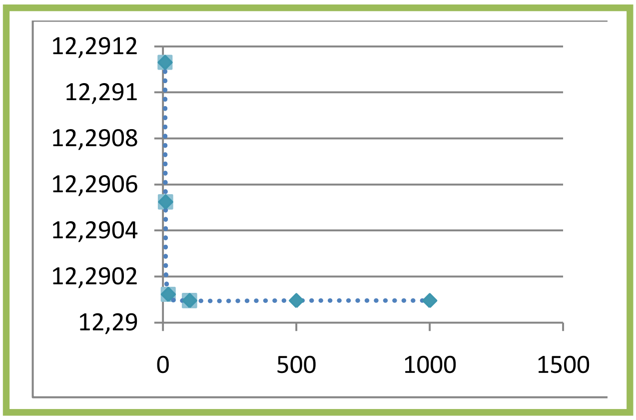
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x^2}}{\sin x} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i\ (impair\ )=1}^{i=7} f(x_i) + 2\sum_{i\ (pair\ )=2}^{i=6} f(x_i) + f(x_8)\right]$$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x^2}}{\sin x}$ = **12,2911309 (Pour n = 8 points)**

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x^2}}{\sin x}$ = 12,2905244 **(Pour n = 10 points)**

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x^2}}{\sin x}$ = 12,2901226 **(Pour n = 20 points)**

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x^2}}{\sin x}$ = 12,2900954 **(Pour n = 100 points)**



La figure nous montre que la solution tend vers 29,0095 pour une précision de 0,0001.