Interpolation :

Soit $f(x) = sin(\pi.x)$. En utilisant le polynôme de Newton (calculer avec 4 chiffres significatifs) :

1. Calculer une approximation de $sin(\frac{\pi}{4})$ par interpolation quadratique (polynôme de degré 2) aux points {0, 1/6, 1/2}.
2. Calculer une approximation de $sin(\frac{\pi}{4})$ par interpolation cubique (polynôme de degré 3) aux points {0, 1/6, ½, 1}.
3. Comparer les deux (02) valeurs trouvées en 1° et 2° avec la valeur exacte de $sin(\frac{\pi}{4})$ et donner une conclusion.

Rappel :

Polynôme de Newton de degré 2 :

$$P_2(x) = \delta_0 + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Polynôme de Newton de degré 3 :

$$P_3(x) = \delta_0 + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)(x - x_1) + \delta_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

δ_i –valeurs de différences divisées (table I et II).

4. Donner l'algorithme qui permet de calculer une approximation de $sin(\frac{\pi}{4})$ par le polynôme de Newton avec les points définis en 3°.

Résolution d'un système d'équation linéaire et inversion d'une matrice :

1. Résoudre par la méthode Gauss-Jordan les trois systèmes d'équations suivants :

$$s_1\begin{cases} \quad\quad x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad = 1 \end{cases} \qquad s_2\begin{cases} \quad\quad x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad = 0 \end{cases} \qquad s_3\begin{cases} \quad\quad x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad = 0 \end{cases}$$

$N.B. Donner\ \ l'état de\ chaque\ étape\ et\ les\ résultats\ finaux.$

2. En déduire la matrice inverse A^{-1}, si elle existe, de la matrice suivante : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Résolution d'un système d'équations linéaires complexe :

Soit le système d'équations complexe suivant :

$$\begin{cases} (1-2i)z_1 + (1+i)z_2 = 3 - i \\ (3-4i)z_1 + 3z_2 = 1 - 2i \end{cases} \quad avec\ i^2 = -1$$

Donner le système d'équations réel qu'il faut résoudre pour trouver la solution $\{z_1, z_2\}$.

Donner l'algorithme de Gauss-Seidel pour résoudre un système d'équations linéaire.

Rappel :

Pour résoudre un système [A]{x}={B}, tels que [A], {B} et {X} sont complexes, on peut décomposer les termes en parties réel le (*rl*) et imaginaire (*im*) :

$[A] = [A_{rl}] + i\,[A_{im}]$, $\{B\} = \{B_{rl}\} + i\,\{B_{im}\}$ et $\{X\} = \{X_{rl}\} + i\,\{X_{im}\}$, avec $i^2 = 1$.

En remplace dans le système puis on sépare les parties réelles et imaginaires.