

Correction de l'examen du premier semestre (S3) – Analyse numérique

Exercice 1 :

Données : fonction définie par la table (x,y):

x	-1	0	3	3,5
y	2	-1	0	1

1. Polynôme de Newton de degré 2 (quadratique) - Facultatif :

$$P_2(x) = \delta_0 + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)(x - x_1)$$

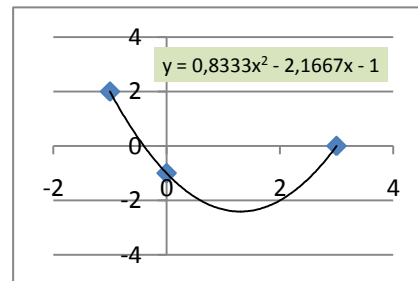
Table des différences divisées :

x_1	$y_0 = \delta_0$	δ_1	δ_2
-1	2		
0	-1	-3	
3	0	1/3	5/6

$$P_2(x) = 2 + (-3)(x - (-1)) + (5/6)(x - (-1))(x - 0)$$

$$P_2(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{13}{6}x - 1$$

$$P_2(2) = \frac{5}{6} \cdot 2^2 - \frac{13}{6} \cdot 2 - 1 = -2$$



2. Polynôme de Newton de degré 3 (cubique) :

$$P_3(x) = \delta_0 + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)(x - x_1) + \delta_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Avec } \delta_j^{(i)} = \frac{\delta_{j-1}^{(i+1)} - \delta_{j-1}^{(i)}}{x_{i+j} - x_i}$$

Table des différences divisées :

x_1	$y_0 = \delta_0$	δ_1	δ_2	δ_3
-1	2			
0	-1	-3		
3	0	1/3	5/6	
3,5	1	2	10/21	-11/63

$$P_3(x) = 2 + (-3)(x - (-1)) + (5/6)(x - (-1))(x - 0) + \left(-\frac{11}{63}\right)(x - (-1))(x - 0)(x - 3)$$

$$P_3(x) = -0,1957672x^3 + 1,2248677x^2 - 1,5793651x - 1$$

$$P_3(2) = -0,07936508 \cdot 2^3 + 0,99206349 \cdot 2^2 - 1,92857143 \cdot 2 - 1 = -1,52380952$$

3. Interpolation par splines cubiques :

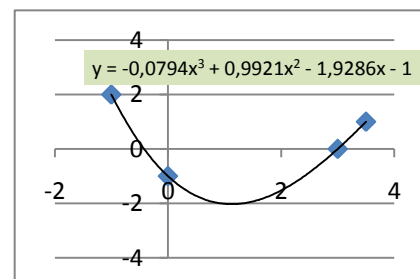
L'équation généralisée des splines cubiques est un système de deux équations à deux inconnus :

4. L'algorithme de calcul des polynômes :

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}$$

Avec n , x_i et x_j ($j = 0, n$) données.

Voir (Cours)



Algorithme de calcul des coefficients de Lagrange :

```

Début
  Var
  n,i,j,k : Entiers
  X,L,P1,P2 : Réels
  Tab X(n), y(n) : Réels
  Lire (n,i,x)
  Pour k = 0 à n
    Faire
      Lire (x(k), y (k))
  FinPour
  P1←-1
  P2←-1
  Pour j=0 à n
    Faire
      Si j<>i
        Alors
          P1←P1*(x-x(j))
          P2←P2*(x(i)-x(j))
        FinSi
    FinPour
  L←P1/P2
  Ecrire (L)
Fin.

```

Exercice 2 :

1. Résolution des trois systèmes d'équations :

$$s_1 \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases} \quad s_2 \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad s_3 \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Matériellement, on peut représenter les trois systèmes comme suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. On résout le système par méthode de Gauss-Jordan :

Etape 1 : k = 1, Pivot $A[k,k] = A[1,1] = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & :1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & :0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & :0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A[i,j] = A[i,j] - A[i,1] * A[1,j] / A[1,1]$ pour $i = 2$ et $i = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & :1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & :-1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & :-1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etape 2 : $k = 2$, pivot $A[k,k] = A[2,2] = 0$. Cherchons un pivot non nul pour $i = 3$.
Faisons une permutation entre les lignes $i = 2$ et $i = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & : & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & : & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A[k,k] = A[2,2] = -1$.

Faisons une normalisation : $A[k,j] = A[k,j]/A[k,k] = A[2,j]/A[2,2]$ pour avoir un Pivot $A[2,2] = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & : & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$A[i,j] = A[i,j] - A[i,2] * A[2,j]/A[2,2]$ pour $i = 1$ et $i = 3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & : & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Etape 3 : $k = 3$, pivot $A[k,k] = A[3,3] = -3$.

Faisons une normalisation : $A[k,j] = A[k,j]/A[k,k] = A[3,j]/A[3,3]$ pour avoir un Pivot $A[3,3] = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$A[i,j] = A[i,j] - A[i,3] * A[3,j]/A[3,3]$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors, la matrice inverse est :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 1 \\ 2/3 & 1/3 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Vérification :

Par substitution dans les trois systèmes, on trouve :

$$s_2 \begin{cases} -1/3 + 2/3 + 2/3 = 1 \\ -1/3 + 2/3 - 1/3 = 0, \\ -1/3 + 1/3 = 0 \end{cases} \quad s_3 \begin{cases} 1/3 + 1/3 + (-2/3) = 0 \\ 1/3 + 1/3 - (-1/3) = 1, \\ 1/3 + (-1/3) = 0 \end{cases} \quad s_1 \begin{cases} 1 + (-1) + 0 = 0 \\ 1 + (-1) - 0 = 0 \\ 1 + 0 = 1 \end{cases}$$

Alors, les solutions des systèmes seront, en ordre, récapitulées dans la matrice S

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

3. La partie d'algorithme de la méthode de Gauss (Jordan) pour la résolution d'un système d'équations linéaires, si à une étape k l'élément appelé pivot a_{kk} est nul ($a_{kk} = 0$), qui permet de rechercher le **plus grand** pivot de remplacement s'il existe et de réaliser la permutation des lignes.

```

.../
SiNon
  L ← k + 1
  P ← Abs(A[l,k])
  Pour l ← k+2 à n
    Faire
      Si Abs(A[l,k]) > P
        Alors
          P ← Abs(A[l,k])
          lp ← l
        FinSi
  l ← lp
  FinPour
  Si P ← 0
    Alors
      Pivot ← Faux
    SiNon
      Pour j ← 1 à n
        Faire
          P ← A[k,j]
          A[k,j] ← A[l,j]
          A[l,j] ← P
        FinPour
      P ← B[k]
      B[k] ← B[l]
      B[l] ← P
    FinSi
  FinSi
/...

```

Exercice 3 :

Calcul de l'intégrale $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx$

D'après le tracé, on peut écrire :

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx$$

Et on peut utiliser 4 points avec $f(x) = \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$.

Alors, en utilisant la méthode de Simpson (niveau 2) :

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx$$

1. Calcul du pas :

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{4} = \frac{\pi}{8} = 0,39269908$$

2. Calcul des valeurs de la fonction dans les différents points :

i	x_i	$f(x_i)$	Coef.	$f(x_i) \cdot \text{Coef.}$
0	0	0	1	0
1	0,39269908	0,12370198	4	0,49480792
2	0,78539816	0,23971277	2	0,47942554
3	1,17809725	0,34081938	4	1,36327752
4	1,57079633	0,42073549	1	0,42073549
$I = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4 \sum_{i(\text{impair})=1}^3 f(x_i) + 2 \sum_{i(\text{pair})=2}^2 f(x_i) + f(x_4)]$				0,72210724

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = 0,72210724$$

