Correction de l'examen du premier semestre (S3) – Analyse numérique

Exercice 1 :

Données : fonction définie par la table (x,y):

x	-1	0	3	3,5
y	2	-1	0	1

1. Polynôme de Newton de degré 2 (quadratique) - Facultatif :

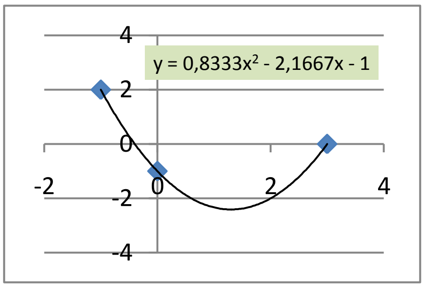
$$P_2(x) = \delta_0 + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Table des différences divisées :

x_1	$y_0 = \delta_0$	δ_1	δ_2
-1	2	-3	5/6
0	-1	1/3	
3	0		

$$P_2(x) = 2 + (-3)(x - (-1)) + (5/6)(x - (-1))(x - 0)$$

$$\boxed{P_2(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{13}{6}x - 1}$$



$P_2(2) = \frac{5}{6}.2^2 - \frac{13}{6}.2 - 1$ = **-2**

2. Polynôme de Newton de degré 3 (cubique) :

$$P_3(x) = \delta_0 + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)(x - x_1) + \delta_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Avec $\delta_{j\,(i)} = \frac{\delta_{j-1(i+1)} - \delta_{j-1(i)}}{x_{i+j} - x_i}$

Table des différences divisées :

x_1	$y_0 = \delta_0$	δ_1	δ_2	δ_3
-1	2	-3	5/6	-11/63
0	-1	1/3	10/21	
3	0	2		
3,5	1			

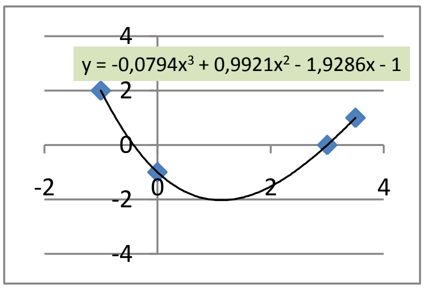
$$P_2(x) = 2 + (-3)(x - (-1)) + (5/6)(x - (-1))(x - 0) + \left(-\frac{11}{63}\right)(x - (-1))(x - 0)(x - 3)$$

$$\boxed{P_2(x) = -0{,}1957672x^3 + 1{,}2248677x^2 - 1{,}5793651x\text{-}1}$$

$P_2(2) =$ -0,07936508. 2^3 +0,99206349. 2^2 $-$1,92857143. 2-1 = **-1,52380952**

3. Interpolation par splines cubiques :

L'équation généralisée des splines cubiques est un système de deux équations à deux inconnus :



4. L'algorithme de calcul des polynômes :

$$L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)},$$

Avec n, x_i et x_j $(j = 0, n)$ données.

Voir (Cours)

Algorithme de calcul des coefficients de Lagrange :

```
Début
        Var
        n,i,j,k : Entiers
        X,L,P1,P2 :Réels
        Tab X(n), y(n) : Réels
        Lire (n,i,x)
        Pour k = 0 à n
                Faire
                Lire (x(k), y (k))
        FinPour
        P1←1
        P2←1
        Pour j=0 à n
                Faire
                Si j<>i
                    Alors
                    P1←P1*(x-x(j))
                    P2←P2*(x(i)-x(j))
                FinSi
        FinPour
        L←P1/P2
        Ecrire (L)
Fin.
```

Exercice 2 :

1. Résolution des trois systèmes d'équations :

$$s_1\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + \quad\; x_3 = 1 \end{cases} \qquad s_2\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + \quad\; x_3 = 0 \end{cases} \qquad s_3\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \quad\; x_3 = 0 \end{cases}$$

Matériellement, on peut représenter les trois systèmes comme suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. On résout le système par méthode de Gauss-Jordan :
   Etape 1 : k= 1, Pivot A[k,k] = A[1,1] = 1

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A[i,j] = A[i,j]-A[i,1]*A[1,j]/A[1,1] pour i = 2 et i = 3.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Etape 2 : k = 2, pivot A[k,k] = A[2,2] = 0. Cherchons un pivot non nul pour i = 3.
Faisons une permutation entre les lignes i = 2 et i = 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

A[k,k] = A[2,2] = -1.
Faisons une normalisation : A[k,j] = A[k,j]/A[k,k] = A[2,j]/A[2,2] pour avoir un Pivot A[2,2] = 1 :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

A[i,j] = A[i,j]-A[i,2]*A[2,j]/A[2,2] pour i = 1 et i = 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Etape 3 : k = 3, pivot A[k,k] = A[3,3] = -3.
Faisons une normalisation : A[k,j] = A[k,j]/A[k,k] = A[3,j]/A[3,3] pour avoir un Pivot A[3,3] = 1 :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

A[i,j] = A[i,j]-A[i,3]*A[3,j]/A[3,3] pour i = 1 et i = 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2/3 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

Alors, la matrice inverse est :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 1 \\ 2/3 & 1/3 & -1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Vérification :
Par substitution dans les trois systèmes, on trouve :

$$s_2\begin{cases} -1/3 + 2/3 + 2/3 = 1 \\ -1/3 + 2/3 - 1/3 = 0, \\ -1/3 + \quad 1/3 = 0 \end{cases} \qquad s_3\begin{cases} 1/3 + 1/3 + (-2/3) = 0 \\ 1/3 + 1/3 - (-1/3) = 1, \\ 1/3 + \quad (-1/3) = 0 \end{cases} \qquad s_1\begin{cases} 1 + (-1) + 0 = 0 \\ 1 + (-1) - 0 = 0 \\ 1 + \quad 0 = 1 \end{cases}$$

Alors, les solutions des systèmes seront, en ordre, récapitulées dans la matrice S

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ -1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

3. La partie d'algorithme de la méthode de Gauss (Jordan) pour la résolution d'un système d'équations linéaires, si à une étape k l'élément appelé pivot a_{kk} est nul ($a_{kk} = 0$), qui permet de rechercher le **plus grand** pivot de remplacement s'il existe et de réaliser la permutation des lignes.

```
…/
SiNon
   L← k + 1
   P←Abs(A[l,k])
Pour l←k+2 à n
     Faire
   Si Abs(A[l,k])> P
        Alors
       P← Abs(A[l,k])
       lp←l
   FinSi
 l←lp
 FinPour
 Si P←0
       Alors
      Pivot ← Faux
      SiNon
      Pour j←1 à n
            Faire
            P←A[k,j]
            A[k,j] ←A[l,j]
            A[l,j] ←P
       FinPour
       P←B[k]
       B[k] ←B[l]
       B[l] ←P
  FinSi
FinSi
/…
```

Exercice 3 :

Calcul de l'intégrale I = $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx$

D'après le tracé, on peut écrire :

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx$$

Et on peut utiliser 4 points avec $f(x) = \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$.

Alors, en utilisant la méthode de Simpson (niveau 2) :

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx$$

1. **Calcul du pas :**

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{4} = \frac{\pi}{8} = 0{,}39269908$$

2. **Calcul des valeurs de la fonction dans les différents points :**

i	x_i	$f(x_i)$	$Coef.$	$f(x_i).Coef.$
0	0	0	1	0
1	0,39269908	0,12370198	4	0,49480792
2	0,78539816	0,23971277	2	0,47942554
3	1,17809725	0,34081938	4	1,36327752
4	1,57079633	0,42073549	1	0,42073549
I$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i(impair)=1}^{3} f(x_i) + 2\sum_{i(pair)=2}^{2} f(x_i) + f(x_4)\right]$				**0,72210724**

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \sin\left(\frac{x}{\pi}\right) cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = \mathbf{0,72210724}$$