Correction de l'examen de rattrapage du premier semestre (S3) – Analyse numérique

Important : Cette solution est en ébauche. Il se peut qu'elle contient des erreurs. Une mise à jour sera fait dans les plus brefs délais.

Exercice 1 :

Données : fonction définie par la table (x,y):

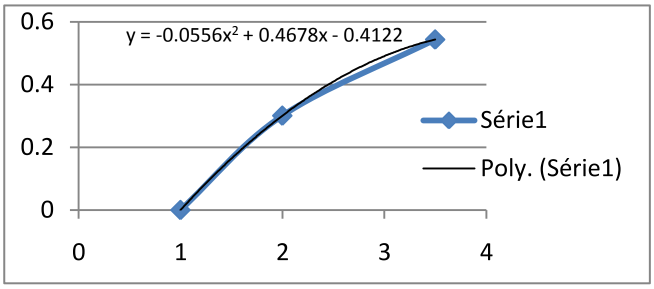
x_i	1	2	3,5	4
y_i	0	0,301	0,544	0,602

1. Polynôme de Newton de degré 2 (quadratique) - Facultatif :

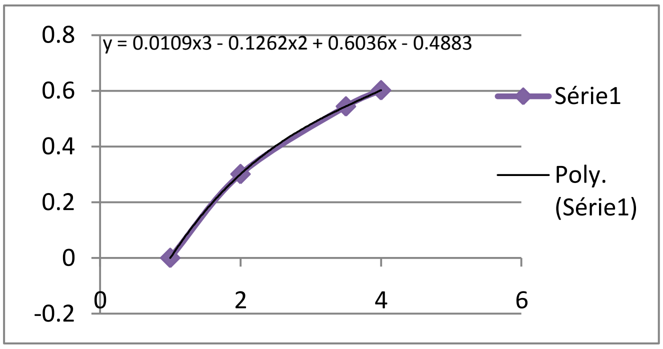
$$P_2(x) = \delta_0 + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Table des différences divisées :

x_1	$y_0 = \delta_0$	δ_1	δ_2
1	0		
2	0 ,301	0,301	-0,0556
3,5	0 ,544	0,162	



$$P_2(x) = -0.0556x2 + 0.4678x - 0.4122$$



$$\delta_{j\,(i)} = \frac{\delta_{j-1(i+1)} - \delta_{j-1(i)}}{x_{i+j} - x_i}$$

$P_2(2) = \frac{5}{6}.2^2 - \frac{13}{6}.2 - 1$ = **-2**

2. Polynôme de Newton de degré 3 (cubique) :

$$P_3(x) = \delta_0 + \delta_1(x - x_0) + \delta_2(x - x_0)(x - x_1) + \delta_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Avec $\delta_{j\,(i)} = \frac{\delta_{j-1(i+1)} - \delta_{j-1(i)}}{x_{i+j} - x_i}$

Table des différences divisées :

x_1	$y_0 = \delta_0$	δ_1	δ_2	δ_3
1	0			
2	0,301	0,301	-0,0556	
3,5	0,544	0,162	-0,023	0,0109
4	0,602	0,116		

$$P_2(x) = 0.0109x3 - 0.1262x2 + 0.6036x - 0.4883$$

$P_3(2) =$ -0,07936508. 2^3 +0,99206349. 2^2 $-$1,92857143. 2-1 = **-1,52380952**

3. Interpolation par splines cubiques :

Voir le cours.

4. Algorithme de la méthode d'interpolation polynômiale de Newton

```
Algorithme Interpolation_Newton
Var
N,i,j : Entiers
x[i],y[i],x,DD[i,j],Nx, P : réels
DEBUT
    Lire (N)
    Pour i=0 à N
            Faire
            Lire (x[i],y[i])
    FinPour
    Lire(x)
    Pour i=0 à N
            Faire
            DD[i,0] ← y[i]
    FinPour
    Pour j=1 à N
            Faire
         Pour i=0 à n-j
                 Faire
                 DD[i,j] ←(DD[i+1,j-1] – DD[i,j-1])/ (x[i+j] – x[j])
         FinPour
    FinPour
    Nx←1
    P←0
    Pour i=0 à N
            Faire
            P←P+DD[0,i]*Nx
            Nx←Nx*(x – x[i])
    FinPour
    Ecrire P
FIN
```

Exercice 2 :

1. Résolution du système d'équations :

$$s_1 \begin{cases} x_1 & +x_2 & -1x_3 = a \\ -x_1 & & +x_3 = b \\ x_1 & +x_2 & = c \end{cases}$$

Matériellement, on peut représenter le système comme suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$$

2. On résout le système par méthode de Gauss :
 Etape 1 : k= 1, Pivot A[k,k] = A[1,1] = 1

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \vdots a \\ -1 & 0 & 1 \vdots b \\ 1 & 1 & 0 \vdots c \end{bmatrix}$$

A[i,j] = A[i,j]-A[i,1]*A[1,j]/A[1,1] pour i = 2 et i = 3.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & -1\vdots & a \\ 0 & 1 & 0 \vdots & a+b \\ 0 & 0 & -1\vdots & a-c \end{bmatrix}$$

Ce qui permet en un seul coup (une seule étape de triangulariser la matrice et résoudre le système par la méthode de Gauss.
Ainsi,

$$x_1 = c - a - b; \quad x_2 = a + b\,; \; x_3 = c - a$$

Pour avoir la matrice inverse de A, il suffit de résoudre les systèmes :

$$s_1 \begin{cases} x_1 & +x_2 & -1x_3 = 1 \\ -x_1 & & +x_3 = 0 \\ x_1 & +x_2 & = 0 \end{cases} ; \; s_2 \begin{cases} x_1 & +x_2 & -1x_3 = 0 \\ -x_1 & & +x_3 = 1 \\ x_1 & +x_2 & = 0 \end{cases} ; \; s_3 \begin{cases} x_1 & +x_2 & -1x_3 = 0 \\ -x_1 & & +x_3 = 0 \\ x_1 & +x_2 & = 1 \end{cases}$$

Soit d'avoir les solutions directement en remplaçant (a,b,c) par (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1) dans les relations (), respectivement, comme suit :

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Alors, la matrice inverse sera :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. La partie d'algorithme de la méthode de Gauss (Jordan) pour la résolution d'un système d'équations linéaires, si à une étape k l'élément appelé pivot a_{kk} est nul ($a_{kk} = 0$), qui permet de rechercher le **plus grand** pivot de remplacement s'il existe et de réaliser la permutation des lignes.

```
.../
SiNon
    L← k + 1
    P←Abs(A[l,k])
Pour l←k+2 à n
     Faire
     Si Abs(A[l,k])> P
         Alors
        P← Abs(A[l,k])
        lp←l
     FinSi
 l←lp
 FinPour
 Si P←0
       Alors
      Pivot ← Faux
      SiNon
      Pour j←1 à n
            Faire
            P←A[k,j]
            A[k,j] ←A[l,j]
            A[l,j] ←P
       FinPour
       P←B[k]
       B[k] ←B[l]
       B[l] ←P
  FinSi
FinSi
/...
```

Exercice 3 :

$y = f(x)$ est symétrique, c'est-à-dire : $f(-x) = f(x)$, alors :

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

En appliquant la méthode Simpson (niveau 2), en utilisant quatre points, pour déterminer l'intégrale :

$$\text{I}=\int_0^a y\,(x)\boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{3}}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{4}\sum_{i(impair)=1}^{3}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}) + \boldsymbol{2}\sum_{i(pair)=2}^{2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_4})\right]$$

Ou bien d'utiliser uniquement deux points, en prenant une seule partie :

$$\text{I} = 2.\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{3}}\,[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) + 4f(\boldsymbol{x_1}) + f(\boldsymbol{x_2})]$$

1. **Calcul du pas :**

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{a-0}{2} = \frac{a}{2}$$

En remplaçant h par $\frac{a}{2}$ dans l'intégrale, on aura :

$$I = \frac{a}{3}\left[f(0) + 4f\left(\frac{a}{2}\right) + f(a)\right]$$

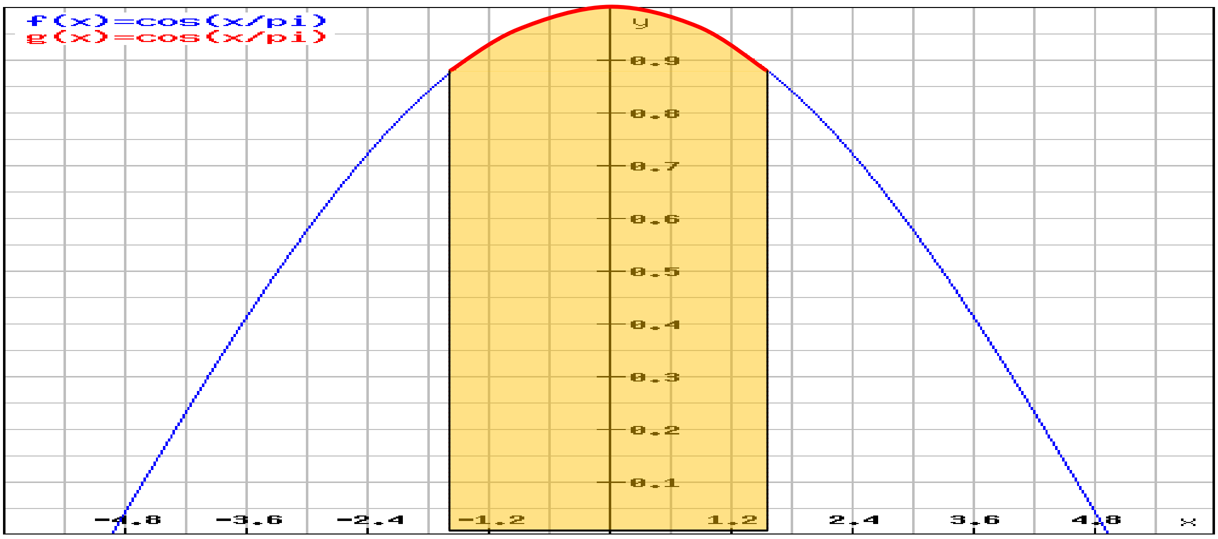
2. **Application : calcul des valeurs de la fonction dans les différents points :**

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx,$$

$h = \frac{\pi}{4}$ = 0.78539816

i	x_i	$f(x_i)$	$Coef.$	$f(x_i).Coef.$
0	0	1	1	1
1	0.78539816	0.96891242	4	3.87564969
2	1.57079633	0.87758256	1	0.87758256
			$I = \frac{a}{3}\left[f(0) + 4f\left(\frac{a}{2}\right) + f(a)\right]$ =	3.01238536

$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos\left(\frac{x}{\pi}\right) dx =$ **3.01238536**



Important : Cette solution est en ébauche. Il se peut qu'elle contient des erreurs. Une mise à jour sera fait dans les plus brefs délais.