11 Splines cubiques

11.1 Introduction

Problème :

- On cherche un interpolant passant par un grand nombre de points d'interpolation $(x_i, f(x_i))$.
- Cependant, un polynôme d'interpolation de degré élevé engendre une erreur importante.

Idée :

- "Rapiécer" plusieurs polynômes $p_i(x)$ de degré peu élevé. L'interpolant est alors défini par $p(x) = p_i(x)$ si $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

  Géométriquement, ceci signifie que la courbe d'interpolation est formée de plusieurs morceaux.

- Pour obtenir une courbe lisse, on exigera que l'interpolant $p(x)$ soit deux fois différentiable : en chaque noeud x_i on doit avoir

  · $p_i(x_i) = p_{i+1}(x_i) = f(x_i)$ (p_i et p_{i+1} ont même ordonnée en x_i)

  · $p'_i(x_i) = p'_{i+1}(x_i)$ (p_i et p_{i+1} ont même tangente en x_i)

  · $p''_i(x_i) = p''_{i+1}(x_i)$ (p_i et p_{i+1} ont même courbure en x_i)

Exemple 1 : "Rapiécer" des polynômes de degré 1 $\longrightarrow$ interpolation linéaire par morceaux (LPM).

x	1	2	4	5
$f(x)$	8	6	12	9

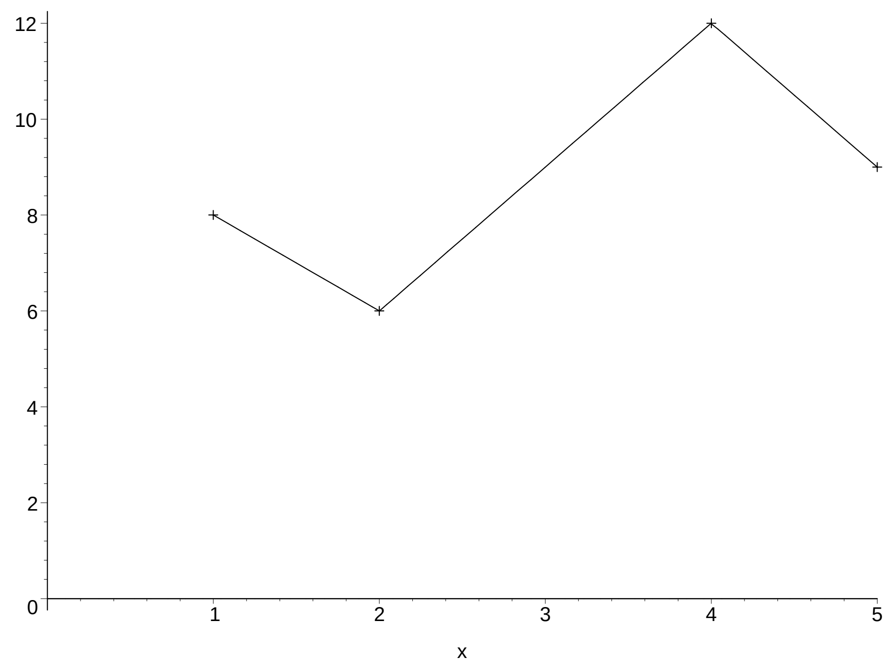

Fig. 6 – Interpolation LPM de f : l'interpolant n'est pas différentiable.

11.2 Splines cubiques

Pour satisfaire les conditions sur p_i, p_i' et p_i'' énoncées à la section précédente, on doit utiliser sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ un polynôme $p_i(x)$ de degré 3.

Définition. Soit $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$, des points d'interpolation. La *spline cubique naturelle* passant par ces points est la fonction polynomiale par morceaux p définie par

$$p(x) = p_i(x) \quad \text{si} \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \ldots, n$$

où

- les p_i sont définis par

$$\begin{aligned} p_i(x) \;&=\; -f''_{i-1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + f''_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} \\ &\quad - \left(\frac{f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i f''_{i-1}}{6}\right)(x - x_i) \\ &\quad + \left(\frac{f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i f''_i}{6}\right)(x - x_{i-1}) \end{aligned}$$

- les f''_i satisfont les $n+1$ équations

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} f''_{i-1} + 2f''_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} f''_{i+1} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$$

  pour $i = 1, \ldots, n-1$ et $f''_0 = 0$, $f''_n = 0$

- $h_i = x_i - x_{i-1}$.

L'interpolant ainsi défini est deux fois différentiable en chaque point.

Exemple 2 : Calculer la spline cubique naturelle passant par les points suivants et l'utiliser pour interpoler la valeur de $f(3)$.

x	1	2	4	5
$f(x)$	8	6	12	9

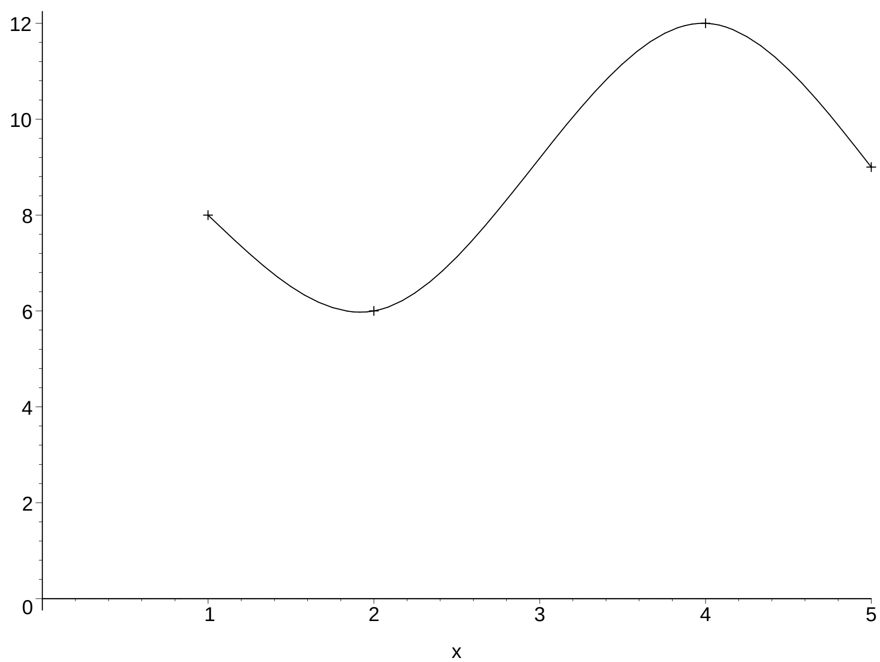

FIG. 7 – Interpolation de f par une spline cubique.

Exemple 3 : La vitesse v d'une voiture a été mesurée à chaque 5 secondes pendant 45 s. Les valeurs suivantes ont été obtenues :

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
v	55	60	58	54	55	60	54	57	52	49

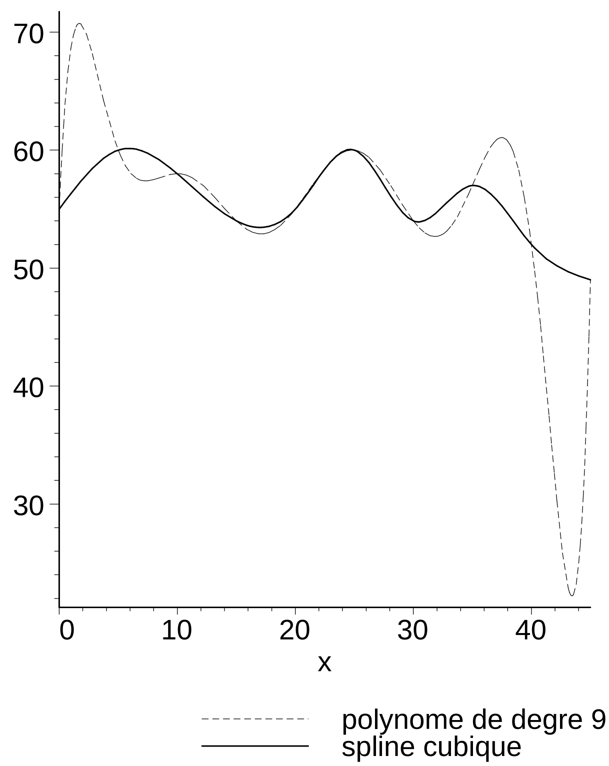

Fig. 8 – Interpolation de v par un polynôme et par une spline cubique.