INTERPOLATION POLYNÔMIALE

Introduction. Soient $(n+1)$ couples $(x_i, f_i) \in \mathbf{R}^2, i \in \{0, \ldots, n\}, x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Dans une classe de fonctions donnée on cherche $g : [x_0, x_n] \to \mathbf{R}$ telle que $g(x_i) = f_i, i \in \{0, \ldots, n\}$. Plus particulièrement, on va s'intéresser à des polynômes. On va étudier les méthodes d'interpolation par les polynômes **de Lagrange** et par les **splines cubiques** pour trouver une telle fonction g.

Tout d'abord, on va voir que dans la classe des polynômes de dégrée $d \leq n$ on a un résultat important d'existence et d'unicité du polynôme d'interpolation, ainsi qu'une estimation de l'erreur d'interpolation commise.

1 Le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Theorème 1.1 *Existence, unicité et contrôle de l'erreur.*

1. *Soient les polynômes réels $l_i(x)$ définis par :*

$$l_i(x) := \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad et \quad p_n(x) := \sum_{i=0}^{n} f_i l_i(x) \tag{1.1}$$

alors p_n est le seul polynôme de dégré au plus égal à n, tel que :

$$p_n(x_i) = f_i,\ i \in \{0, \ldots, n\}.\ p_n \text{ s'appelle polynôme d'interpolation de Lagrange}$$

2. *Soit $f \in C^{n+1}([x_0, x_n])$ tel que $f_i = f(x_i), i \in \{0, \ldots, n\}$. Alors $\forall x \in [x_0, x_n], \exists \xi \in [x_0, x_n]$:*

$$f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} = \omega(x)\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \tag{1.2}$$

où $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$ est appelée : fonction d'erreur.

Remarque 1.1 *Les $l_i(x)$ forment une base de $\mathcal{P}_n$, l'espace vectoriel des polynomes de degré n. Le calcul pratique de $p_n(x)$ n'est commode qu'à condition de poser*

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

car alors, il est facile de montrer que (faites le !) :

$$p_n(x) = \omega(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{f_i}{\omega'(x_i)(x - x_i)}$$

Remarque 1.2 *Si pour le problème concret d'interpolation dans $[-1, 1]$ on peut choisir les abcisses x_i des points d'interpolation, le meilleur choix en ce qui concerne le contrôle de la fonction d'erreur $\omega(x)$ dans (1.2), est donné par les points d'interpolation de Tchebychev définis par $x_i := \cos(\frac{2i+1}{2n+2}\pi), i \in \{0, \ldots, n\}$.*

2 Les splines cubiques.

Notation : *Soit u une fonction réelle, on notera $u|_{[a,b]}$, la restriction de u à l'intervalle réel $[a,b]$.*

Définition : *Une fonction d'interpolation g est appelée spline cubique si*

1. $g \in C^2([x_0, x_n])$, *et*
2. $g|_{[x_i,x_{i+1}]}$ *est un polynôme de degré au plus égal à* 3.

On a le :

Theorème 2.1 **Spline cubique naturel, existence et unicité.**

1. *Il existe un spline cubique g tel que $g(x_i) = f_i, i \in \{0, \ldots, n\}$,*
2. *Soit $f \in C^4([x_0, x_n])$ tel que $f_i = f(x_i), i \in \{0, \ldots, n\}$ et soient $h = x_{i+1} - x_i$. Il existe un spline cubique g tel que $\sup_{x \in [x_0,x_n]} |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)| \leq 2 \sup_x |f^{(4)}(x)| h^{4-k}, \forall k \in \{0, 1, 2, 3\}$.*
3. *Il existe un seul spline cubique g, appelé spline cubique naturel tel que $g_i := g(x_i) = f_i$ et $g''(x_0) = g''(x_n) = 0$. Il est définit pour $h_i := x_{i+1} - x_i, i \in \{0, \ldots, n-1\}$, par :*

$$g|_{[x_i,x_{i+1}]}(x) = f_i + g'_i(x - x_i) + g''_i \frac{(x - x_i)^2}{2} + \frac{g''_{i+1} - g''_i}{h_i} \frac{(x - x_i)^3}{6} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}],$$

où

$$g'_i := \frac{g_{i+1} - g_i}{h_i} - h_i \frac{g''_{i+1} + 2g''_i}{6}, \quad i \in \{0, \ldots, n-1\}$$

et où les g''_i sont déterminés par la solution du système linéaire suivant de $(n-1)$ équations à $(n-1)$ inconnues :

$$g''_{i-1} h_{i-1} + g''_i (2h_{i-1} + 2h_i) + g''_{i+1} h_i = 6 \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - 6 \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

dans lequel

$$g''_0 = 0$$
$$g''_n = 0.$$

(Voir le tutoriel de la séance sur l'interpolation).

3 Indications pratiques pour la séance

Cette séance va nous permettre de nous familiariser avec l'utilsation de fonctions pures dont on n'a pas besoin de sauvegarder la définition en mémoire, (voir le tutoriel, paragraphe 3.1.4*).*

Pour les représentations graphiques, utilisez des fonctions pures pour écrire les instructions de tracé graphique (i.e. **Plot***). Se référer à la séance sur le graphisme ainsi qu'au tutoriel, chapitre 2.*

Distinguez les différentes courbes apparaissant sur un même graphique par des couleurs différentes.

Concernant l'exercice 3, utilisez une procédure Mathematica, i.e. un **Module** *pour programmer la fonction spline. Voir le tutoriel, paragraphe* 3.3 *concernant la programation structurée.*

Les différentes questions requièrent la construction de listes (de points, de valeurs de fonctions,...). Pensez aux instructions **Table** *et* **Range** *(voir le tutoriel au paragraphe* 1.2.6 *sur les listes).*

Exercice 1

1. *Tracer la fonction d'erreur* $\omega(x) := (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ *définie en (1.2), pour des points d'interpolation équidistants* $x_i := i/n$ *dans le domaine réel* $[0,1]$ *ainsi que pour les points de Tchebychev dans le domaine réel* $[-1,1]$*, ceci pour différentes valeurs de* n*.*
   Que se passe-t-il aux bornes du domaine ?
2. *Rédiger une fonction Mathematica pour calculer le polynôme* p_n *de Lagrange (1.1) en fonction de* n *et des listes de points* $\{x_i\}$ *et* $\{f_i\}$*. Calculer* p_n *dans les cas suivants :* $(x_i, f_i) = (i/n, a\sin(4\pi i/n))$: $n = 3, 4, 5, 6$*. Tracer les* p_n *ainsi que la fonction* $a\sin(4\pi x)$ *sur un même graphique (prendre* $a = 10$*).*

Exercice 2

Soit $f(x) := 1/(1+x^2), x \in [-1,1]$*. Tracer* p_n *et* f *dans un même graphique pour les données* $(x_i, f_i) = (x_i, f(x_i))$*. On choisira* n *convenablement. Comparer la convergence dans les cas suivants :*

1. *les abcisses* x_i *sont équidistantes dans* $[-1,1]$
2. *les abcisses* x_i *sont données par les points de Tchebychev définis plus haut.*

Exercice 3

1. *Rédiger une fonction Mathematica pour calculer le spline cubique naturel* g *en fonction de* n *et des listes de points :* $\{x_i\}$ *et* $\{f_i\}$*.*
2. *Refaire les interpolations démandées aux exercices* 1*.2 et* 2*.1 pour le spline naturel, comparer vos résultats avec ceux obtenus par la méthode de Lagrange.*
3. *Comparer les résultats de votre programme avec celui fournit par la routine* **Interpolation** *de Mathematica.*