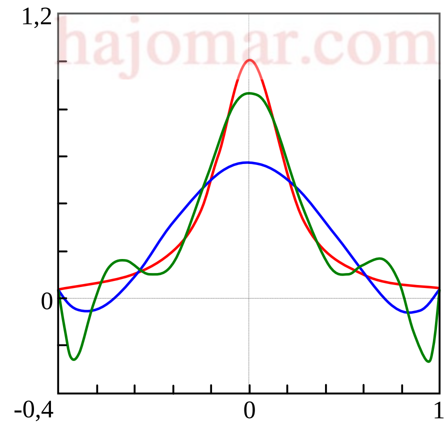
Le spline cubique :

L'interpolation d'une fonction dont on ne connaît que les valeurs dans des points discrets peut se faire par tranche : fonction définie par morceaux par des polynômes généralement d'ordre 3. On obtient des courbes qui se rapprochent à la fonction exacte toute en évitant le phénomène de Runge : L'approximation est de plus en plus mauvaise que le polynôme d'interpolation en continue dépasse certain de degré
.



La figure nous montre la fonction de Runge en rouge et deux autres courbes d'interpolation, de degré 5 en bleu et de degré 9 en vert.

Cette méthode d'interpolation est très utilisée dans les conceptions à contours complexes, comme dans les coques des navires et automobiles. Par sa simplicité dans la l'implémentation elle est utilisée dans les logiciels de dessin et de design.

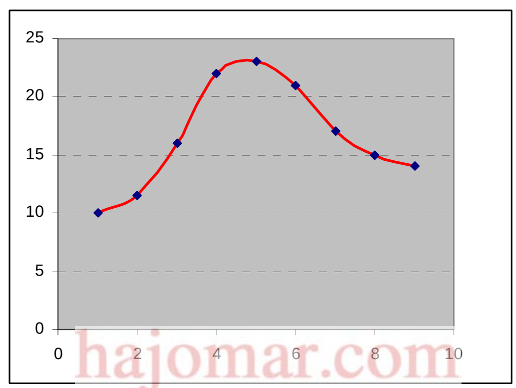
Formulation :

Pour la fonction discrète à n+ 1 points, $y_i = f_i(x_i)$, définissant les points :

$$(x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ ....\ (x_k,y_k),....\ (x_n,y_n)$$

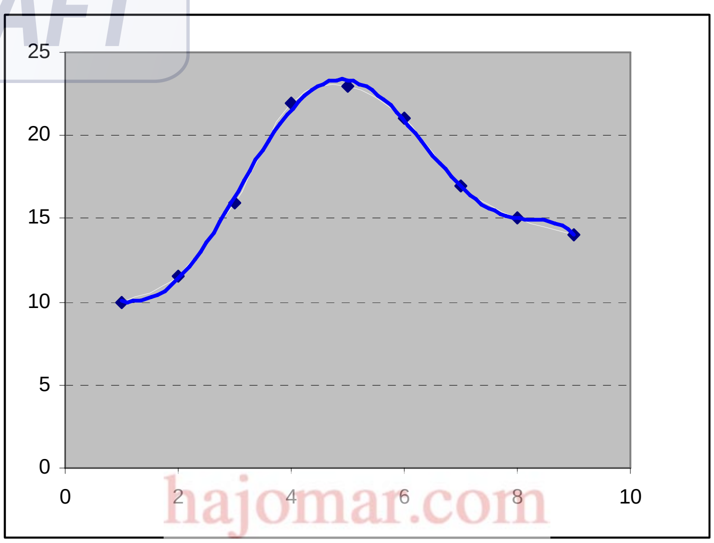
La courbe de la fig. est définie par 9 points, dont les coordonnées sont groupées dans le tableau en face.

x_i	$y_i = f_i(x_i)$,
1	10
2	11,5
3	16
4	22
5	23
6	21
7	17
8	15
9	14



Il est possible de lier les points par une seule interpolation polynomiale (en bleu) de degré 6, dont la fonction est :

$$y = -0{,}0042x^6 + 0{,}1176x^5 - 1{,}1946x^4 + 5{,}2358x^3 - 9{,}0812x^2 + 6{,}4998x + 8{,}4444$$



Cependant, il est plus simple, précis et même très pratique, de diviser la fonction discrète en plusieurs morceaux et d’interpoler par parties raccordées entre elles, avec des courbes polynomiales de degré 3.
Pour permettre la courbure entre les points, les dérivées premières et secondes doivent être continue sur l’intervalle (x_0, y_n).

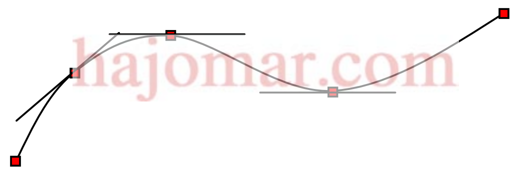
Le polynôme d’interpolation qui lie les deux points (x_k, y_k) et (x_{k+1}, y_{k+1}) est de degré 3 :

$S_k = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3,\ x \in [x_k, x_{k+1}],$

a_k, b_k, c_k, d_k : Coefficients à déterminer pour chaque spline S_k .

La courbe d’interpolation est liée aux contraintes suivantes :

$S_k = y_k$: Égalité des valeurs dans le point (x_k, y_k).



$S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$: Raccordement des deux splines (à gauche et à droite du point (x_{k+1}, y_{k+1}).

$S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$: Les tangentes des deux courbes (gauche et droit) au point (x_{k+1}, y_{k+1}) doivent avoir la même pente.

$S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$: Les deux splines (gauche et droit) suivent la même courbure au point (x_{k+1}, y_{k+1}) en descente ou montante.

Alors nous aurons quatre équations à quatre inconnues, en plus des conditions à imposer pour déterminer les deux inconnues restantes du dernier spline.
Les deux dernières inconnues sont déterminé en supposant que les dérivées secondes ou troisièmes sont nulles aux frontières ou en définissant une fonction *f, tel que S’(x) = f’(x).* Ce sont les conditions limites.

Construction du cubique spline :
Démarrons de la dérivée seconde qui doit avoir une forme linéaire par morceau, en choisissant un polynôme de Lagrange.

$$S''_k(x) = S''_k(x\ )\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + S''_k(x_{k+1})\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Posons $h_k = x_{k+1} - x_k$ et $m_k = S''_k(x_k)$
Alors,

$$S''_k(x) = \frac{m_k}{h_k}(x_{k+1} - x_k) + \frac{m_{k+1}}{h_k}(x - x_k),\ x \in [x_k, x_{k+1}],\ k = \overline{0, n-1}$$

Faisant maintenant l’intégrale pour déterminer $S'_k(x)$ et $S_k(x)$:

$$S'_k(x) = -\frac{m_k}{2h_k}(x_{k+1} - x_k)^2 + \frac{m_{k+1}}{2h_k}(x - x_k)^2 - p_k + q_k$$

$$S_k(x) = \frac{m_k}{6h_k}(x_{k+1} - x_k)^3 + \frac{m_{k+1}}{2h_k}(x - x_k)^3 - p_k(x_{k+1} - x_k) + q_k(x - x_k)$$

On suppose que la constante dans la deuxième intégrale est nulle, car notre objectif était de déterminer une fonction $S_k(x)$ puis déterminer leur dérivées $S'_k(x)$ et $S''_k(x)$, ce qui est correcte avec la fonction $S_k(x)$ ainsi déterminé en suivant le chemin inverse (l’intégration au lieu de la dérivation).